OM NOGLE SPECIELLE TOLVTONERÆKKER

af Glenn Madsen

København
2021

Indhold

Om nogle specielle tolvtonerækker.

(Opdateret 6/11/2022).

En tolvtonerække.

I det følgende benytter vi tal for noderne, da det er det mest hensigtsmæssige:

c	cis	d	es	e	f	fis	g	gis	a	b	h
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

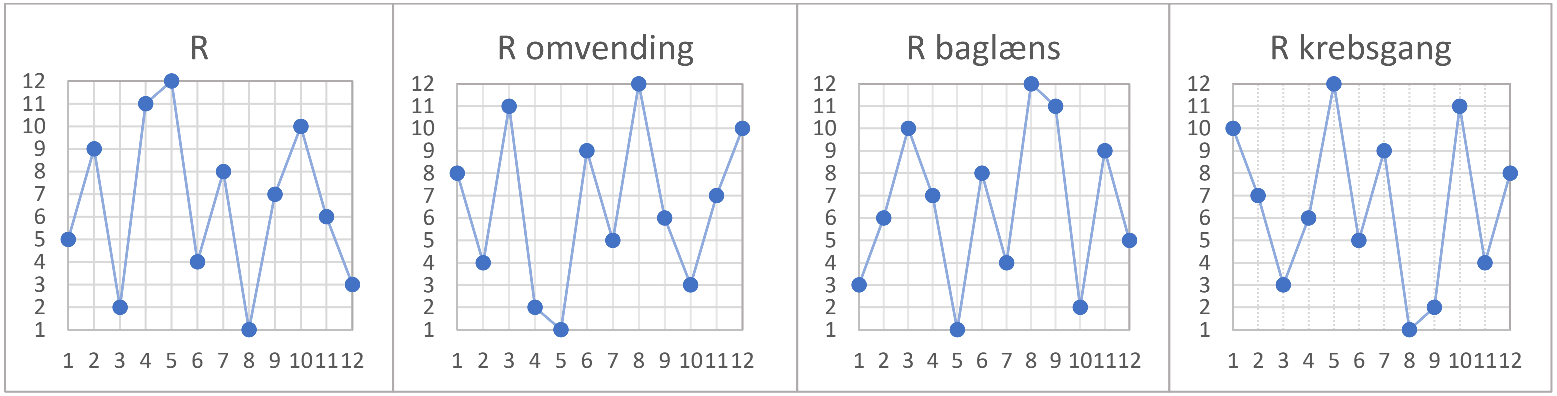
Vi betragter en vilkårlig tolvtonerække.

Rækken	5 9 2 11 12 4 | 8 1 7 10 6 3	e gis cis b h es g c fis a f d
den omvendte række	8 4 11 2 1 9 | 5 12 6 3 7 10	g es b cis c gis e h f d fis a

Vi ser vi får den omvendte tonerække ved at trække tallet fra 13. Vi har spejlet om midtpunktetpunkt mellem 1 og 12 eller 6 og 7, dvs. med c=1 fås c ↔ h, cis ↔ b, d ↔ a osv. Denne omvending benyttes i det følgende. Rækken baglæns og krebsgangen eller krebsomvendingen (omvendingen baglæns) følger så umiddelbart ved at nævne tallene bagfra:

Rækken baglæns	3 6 10 7 1 8 | 4 12 11 2 9 5
Krebsgangen	10 7 3 6 12 5 | 9 1 2 11 4 8

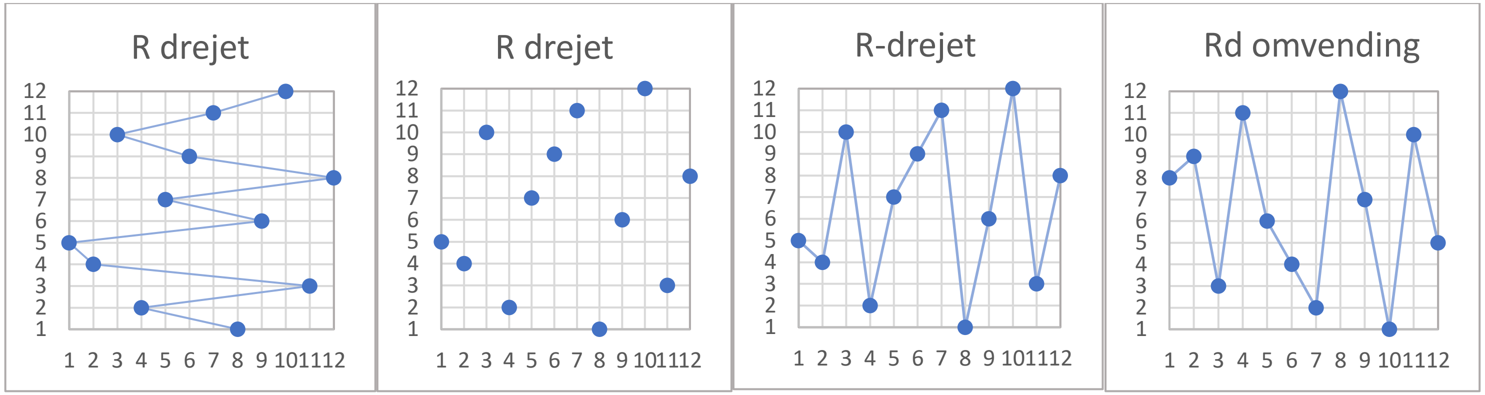
Vi indtegner rækkerne i diagrammer



Man kan opfatte rækken baglæns som fremkommet ved en spejling omkring en lodret akse, og omvendingen som fremkommet ved en spejling omkring en vandret akse. Hermed bliver krebsgangen en spejling i hhv. en lodret og en vandret akse. Dette svarer til en drejning på 180° omkring centrum af diagrammet eller omkring koordinatsystemets origo, som her er (1,1). Vi vil nu betragte en drejning på 90°.

Den drejede række

Vi drejer rækken fra før 90° i positiv retning, dvs. venstre om, mod uret. Vi drejer papiret, derved fremkommer det første diagram. Derefter fjerner vi fobindelseslinierne, eller overfører punkterne til et nyt diagram og får plottet på den anden figur. Til slut forbindes disse punkter. Hermed har vi fundet en ny tolvtonerække: den drejede række. Kalder vi rækken for R, kaldes den drejede række for Rd eller R-drejet.[1]



Den drejede række er således	5 4 10 2 7 9 | 11 1 6 12 3 8	e es a cis fis gis b c f h d g.
Omvendingen er	8 9 3 11 6 4 | 2 12 7 1 10 6	g gis d b f es cis h fis c a f.

Denne har ligeledes de fire varianter,[2] som vi så ovenfor. I alt har rækken 8 varianter. Som vi skal se, gælder dette ikke alle tolvtonerækker. Vi observerer, at små sekunder bevares.

Vi vil også dreje rækken uden brug af diagrammet. Vi betragter matematikken i forbindelsen med drejningen på 90° i positiv retning.

[1] I Exel bytter man om på akserne, numrerne på y-aksen og tonehøjderne på x-aksen. Tastet rækkens omvending, det vil her sige 8 9 3 11 6 4 2 12 7 1 10 6, ind som første akse fås rækken drejet 90° i positiv retning, indtaster man rækken direkte med ombyttede akser får man *omvendingen* drejet 90° i positiv retning, se efterfølgende afsnit.

[2] Almindeligvis kaldes disse varianter for omvendinger, men jeg bruger ordet varianter som fællesbetegnelse, da drejning på 90° ikke er en omvending.

Ved drejningen gælder der, at rækkenummer *r* bliver til tonehøjde *t*, tonehøjde bliver til rækkenummer, men hvor rækkenummer f.eks. 5 bliver til tonehøjden 5, dvs. $r \to t$, bliver tonehøjden til rækkenummer $13 - t$, dvs. $t \to 13 - t$. I alt har vi $(r, t) \to (13 - t, r)$.
Vi vil nu konstruere den drejede række.

Rækkenummer	1	2	3	4	5	6	|	7	8	9	10	11	12	
Tonehøjde	5	9	2	11	12	4	|	8	1	7	10	6	3	e gis cis b h es g c fis a f d

Vi bruger formlen og får

1. (1,5) → (13-5, 1) = (8,1)
2. (2,9) → (13-9, 2) = (4,2)
3. (3,2) → (11,3)
4. (4,11) → (2,4)
5. (5,12) → (1,5)
6. (6,4) → (9,6)
7. (7,8) → (5,7)
8. (8,1) → (12,8)
9. (9,7) → (6,9)
10. (10,10) → (3,10)
11. (11,6) → (7,11)
12. (12,3) → (10,12)

Rækkenummer	1	2	3	4	5	6	|	7	8	9	10	11	12	
Drejede række	5	4	10	2	7	9	|	11	1	6	12	3	8	e es a cis fis gis b c f h d g

Spejling omkring diagonalakserne

Ved spejling omkring 1. diagonalaksen (*r,t*) har vi afbildningen (*r,t*) → (*t,r*), hvor *r* = rækkenummer, *t* = tonehøjde. Ved spejling om 2. diagonalakse (*r*,13-*t*) har (*r,t*) → (13-*t*,13-*r*).[3]

Spejling omkring 1. diagonalakse

Vi viser spejlingen omkring 1. diagonalakse vha. af et skema. Vi har vores tolvtonerække og benytter formlen (*r,t*) → (*t,r*).

Rækkenummer	1	2	3	4	5	6	|	7	8	9	10	11	12	
Tonehøjde	5	9	2	11	12	4	|	8	1	7	10	6	3	e gis cis b h es g c fis a f d

[3] Vi benytter, at ved symmetri omkring centrum (man drejer punktet 180° i enten i positiv eller negativ retning) går punktet (*r,t*) går over i (13−*r*, 13−*t*). Spejler vi dette punkt i 1. diagonalakse fås koordinaterne (13−*t*, 13−*r*).

Den spejlede række bliver (8,1) → (1,8), (3,2) → (2,3), (12,3) → (3,12), osv.

Rækkenummer	1	2	3	4	5	6	|	7	8	9	10	11	12	
Tonehøjde	8	3	12	6	1	11	|	9	7	2	10	4	5	g d h f c b gis fis cis a es e

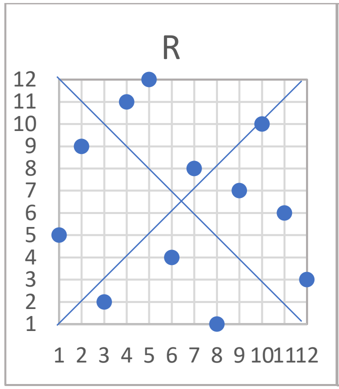
Spejling omkring 2. diagonalakse

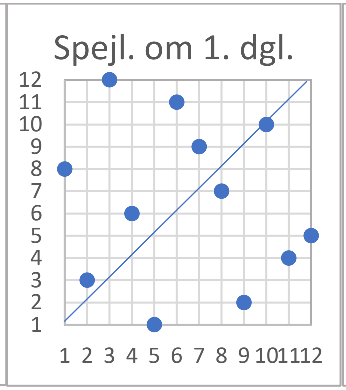
Tilsvarende bestemmes rækken spejlet i 2. diagonalakse med $(r,t) \to (13\text{-}t, 13\text{-}r)$.

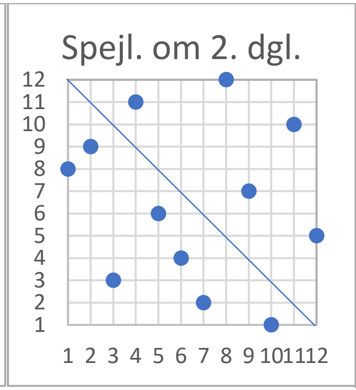
Den spejlede række bliver (1,5) → (13 – 5, 13 – 1) = (8, 12), (2,9) → (13 – 9, 13 – 2) = (4, 11) osv.

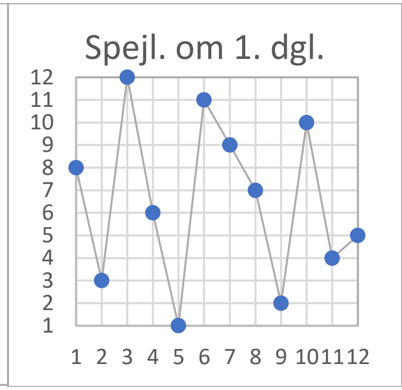
Rækkenummer	1	2	3	4	5	6	|	7	8	9	10	11	12	
Tonehøjde	8	9	3	11	6	4	|	2	12	7	1	10	5	g gis d b f es cis h fis c a e

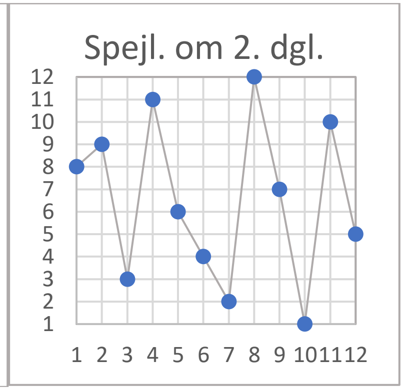
Vi kan plotter punkterne ind på et stykke kvadratisk papir. Her vil vi bruge computeren med akserne byttet om. Ved spejling i 1. diagonalakse bytter vi blot om på akserne. Ved spejling i 2. diagonalakse må vi også trække tallene fra 13, som formlen angiver. Vi bruger den allerede benyttede tolvtonerække og fås











Vi ser at rækken spejlet i 1. diagonalaksen er lig den drejede række baglæns, og rækken spejlet i 2. diagonalakse er lig omvendingen af den drejede række. Hvad strukturen angår er de identiske. *Der er således, under spejling eller drejning, højst to strukturforskellige rækker for en vilkårlig tolvtonerække og dermed højst 8 varianter.*

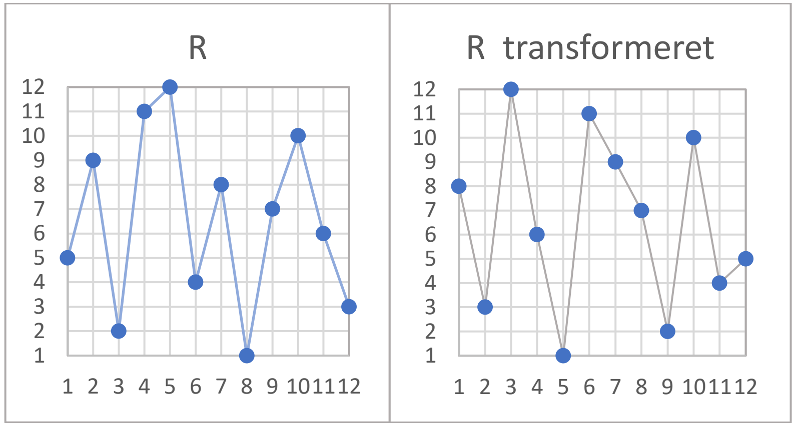
Den transformerede række

Som det fremgår har vi opfattet tolvtonerækken som bestående af to lige variabler, nemlig rækkenummer *r* og tonehøjde *t*. Vi kan selvfølgelig kun foretage de her nævte manipulationer, hvis vi noterer rækken i et kvardrat. Ser vi bort fra dette, ser vi, at den grundlæggende afbildning er transformationen $(r,t) \rightarrow (t,r)$, altså rækkenummer går til tonehøjde, og tonehøjde går til rækkenummer. Denne række kan man, hvis man vil, opfatte som grundstillingen af den 'transformerede' række. Transformation svarer til spejling i 1. diagonalakse, som det allerede er nævnt.

For en ordens skyld anfører vi diagrammerne for vores række og dens transformerede.

Angående konstruktionen af rækken se "Spejling omkring 1. diagonalakse".

Rækken	5 9 2 11 12 4 | 8 1 7 10 6 3	e gis cis b h es g c fis a f d
Transformeret række	8 3 12 6 1 11 | 9 7 2 10 4 5	g d h f c b gis fis cis a es e



Vi kan således omformulere den ovennævnte sætning: *For en vilkårlig tolvtonerække findes højst to strukturforskellige rækkern, nemlig rækken selv og den transformerede række.*[4]

Symmetriske rækker

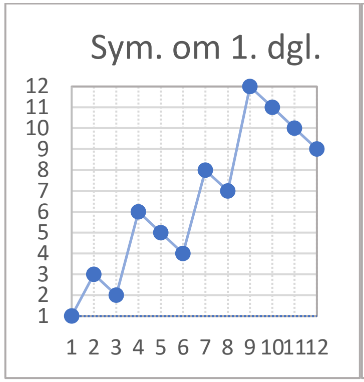
Vi bemærker, at rækken kan være symmetrisk om de to diagonaler og symmetrisk omkring diagrammets centrum eller midtpunkt. Vi har altså to slags symmetriske rækker (1) rækker symmetriske om diagonalakserne og (2) rækker symmetriske omkring diagrammets centrum.

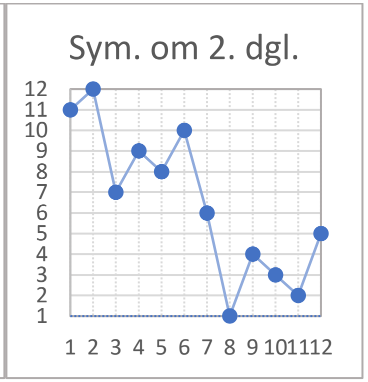
[4] Her ses bort fra de 144 rækker der fremkommer ved oktav- og rækkeforskydninger. De regnes for samme række.

Centrum for diagrammet ligger midt mellem 6 og 7 både mht. tonehøjde og rækkefølge, dvs. centrum har koordinaterne (6½, 6½).

Rækker symmetriske om diagonalakserne

De to diagonaler i diagrammet kaldes, som nævnt, henholdsvis 1. diagonalaksel (r,t) og 2. diagonalakse $(r,13-t)$. Vi vil betragte tolvtonerækker som er symmetriske omkring diagonalerne, diagonalerne hver for sig eller begge samtidig.





Den første række R1 er symmetrisk om 1. diagonalakse, den anden række R2 er symmetrisk om 2. diagonalakse.

Vi konstaterer, at den drejede rækker her er lig med rækkens omvending.Der er således kun én struktur for rækker, der er symmetriske om en af diagonalakserne. Ellers ser vi, at alle de fire klassiske varianter er forskellige, dvs. rækken selv, omvendingen, rækken baglæns og krebsgangen. Vi ser endvidere, at rækken selv og krebsgangen er symmetrisk om 1. diagonalen, omvendingen og rækken baglæns er symmetrisk om 2. diagonalen. Disse symmetriske rækker har fire varianter, til forskel for den vilkårlige tolvtonerække som havde 8 varianter. Rækken, vi valgte, var således kun vilkårlig i den forstand, at vi valgte en række, der ikke havde symmetriegenskaber.

Symmetrisk om 1. diagonalakse.

Først spejling i 1. diagonalakse. Vi har allerede konstateret, at ved en spejling i 1. diagonalakse går (r,t) over i (t,r). Når der skal gælde symmetri, har vi yderligere at $(r,t) = (t,r)$, hvilket her er kortform, for at både punktet (r,t) og spejlpunktet (t,r) indgår i rækken.[5] Vi kan, som ovenfor, konstruere rækken direkte i diagrammet eller, som her, benytte skemaet. Vælger vi et punkt (1,8) skal der gælde, at det afbildes i punktet (8,1), som således selv er et punkt på rækken. Vi skal kun vælge 6 tal eller rettere 5 tal, da det sjette således vil være givet, og bruge formlen, altså $(r,t) \rightarrow (t,r)$ og begge punkter ligger på tolvtonerækken:

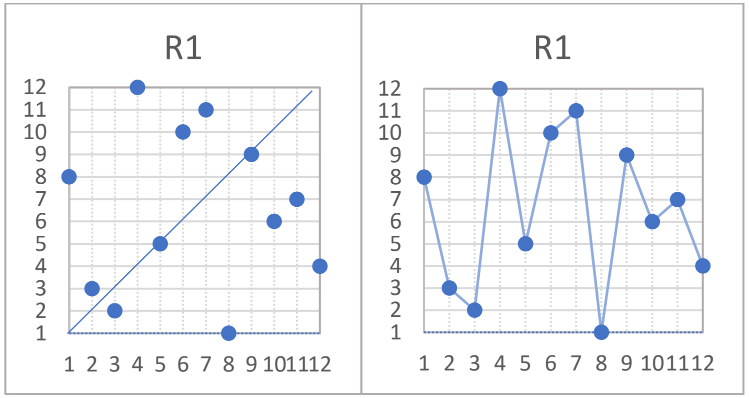
---

[5] T *er en tolvtonerække. Da gælder* $(r,t) \in T$ *og* $f(r,t) \in T$; $f:(r,t) \rightarrow (t,r)$.

Rækkenummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tonehøjde	8	3	2	12	5	10	11	1	9	6	7	4

g d cis h e a b c gis f fis es

Antallet af punkter på diagoanlaksen er altid lige, enten 0, 2, 4 osv. Vi har vi lagt to af punkterne på diagonalaksen her. Vi checker efter, at alle 12 tal forefindes og plotter dem ind i et diagram:



Det er lettere at se symmetrien uden stregerne mellem punkterne. Vi ser at rækken er symmetrisk om 1. diagonalen, som ønsket.

Symmetrisk om 2. diagonalakse

Vi spejler nu i 2. diagonalakse. Ved spejling i 2. diagonalakse går punket (r,t) over i $(13 - t, 13 - r)$.[6]
Vi benytter skemaet som før:

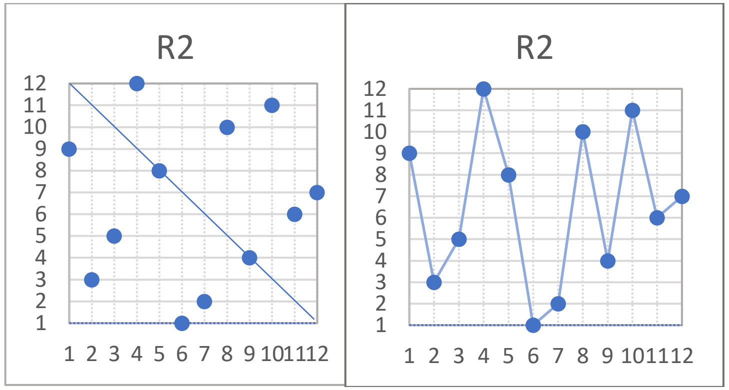
Rækkenummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tonehøjde	9	3	5	12	8	1	2	10	4	11	6	7

gis d e h g c cis a es b f fis

$(1,9) \to (13 - 9, 13 - 1) = (4, 12)$ $(2,3) \to (13 - 3, 13 - 2) = (10,11)$
$(3,5) \to (13 - 5, 13 - 3) = (8,10)$ $(5,8) \to (13 - 8, 13 - 5) = (5,8)$
$(6,1) \to (13 - 1, 13 - 6) = (12,7)$ $(7,2) \to (13 - 2, 13 - 7) = (11,6)$
$(9,4) \to (13 - 4, 13 - 9) = (9,4)$.

Vi benytter, at ved symmetri omkring centrum (man drejer punktet 180° i enten i positiv eller negativ retning) går punktet (r,t) går over i $(13-r, 13-t)$. Spejler vi dette punkt i 1. diagonalakse fås koordinaterne $(13-t, 13-r)$.

Vi bemærker at to af punkterne (5,8) og (9,4) ligger på 2. diagonalakse, da de spejles i sig selv, hvilket også fremgår af diagrammet. Her kunne man selvfølgelig også have konstruere rækken direkte i koordinatsystemet.
Diagrammet bliver



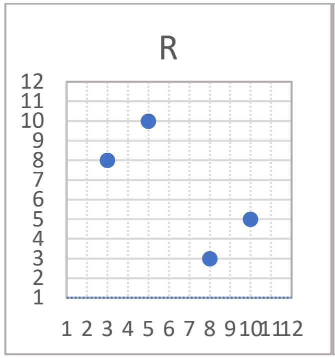
Vi ser tydeligt symmetrien omkring 2. diagonalen.

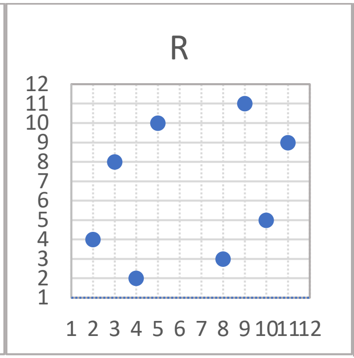
Man kan naturligvis også, som altid, konstruere rækken direkte i diagrammet. De to mængder, hhv. spejling i 1. og 2. diagonalakse, indeholder lige mange elementer, men kun diagonalakserne ligger i begge mængder. Ved en drejning på ± 90° eller ved spejling i den lodrette eller vandrette akse gennem centrum kan de to mængder føre over i og dække hinanden, de er isomorfe. Kun en lille mængde rækker vil, som vi skal se, ligge i begge mængder.

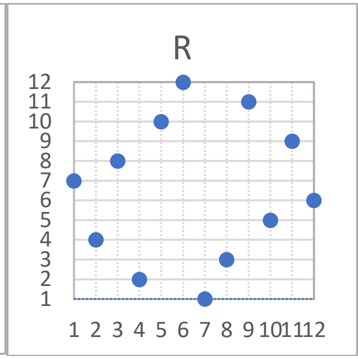
Vi tæller antallet. Der gælder, at antallet af punkter, der ligger på diagonalen, altid er lige. Antallet kan være 0, 2, 4, 6, 8, 10 eller 12.
Ved første valg er der 12 muligheder, da symetritonen er fastlagt. Ligger tonen på diagonalaksen, ligger der således endnu en tone på diagonalaksen, ellers får vi et ulige antal toner. Andet valg er der 10 mulighed, tredje valg er der 8 muligheder osv. I alt har vi antallet $12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 46080$ rækker.

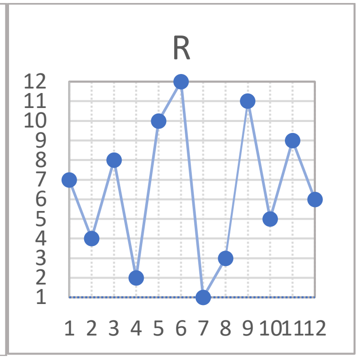
Rækker der er symmetriske om begge diagonaler

Vi vil nu betragte rækker. der er symmetriske om begge diagonalakser Om disse rækker gælder det endvidere, at de også er symmetriske omkring centrum. Her bruger vi først metoden med at plotte rækken i diagrammet. Vi konstruerer en sådan række.
Hvis punktet ligger på en af diagonalerne, og der er et lige antal, fastlægger det et andet punkt, ellers fastlægger hvert punkt 3 andre punkter.
Vi vælger punkterne ét ad gangen med de givne betingelser og får:









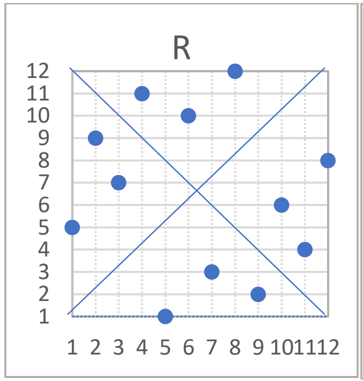
Vi vil bruge skemaet til at konstruere en anden række. Først med spejling i 1. akse $(r,t) \rightarrow (t,r)$ dernæst spejling i 2. akse $(r,t) \rightarrow (13-t,\ 13-r)$ og tilsidst igen spejling i 1. akse $(13-t,\ 13-r) \rightarrow (13-r,\ 13-t)$.

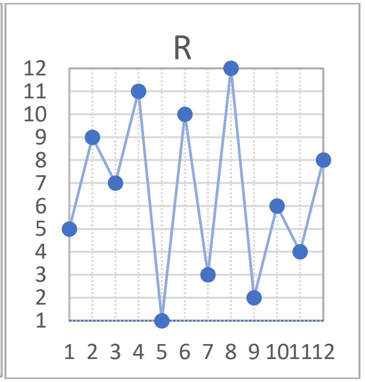
Rækkenummer	1	2	3	4	5	6 |	7	8	9	10	11	12
Tonehøjde	5	9	7	11	1	10 |	3	12	2	6	4	8
	1	2	3	2	1	3	3	1	2	3	2	1

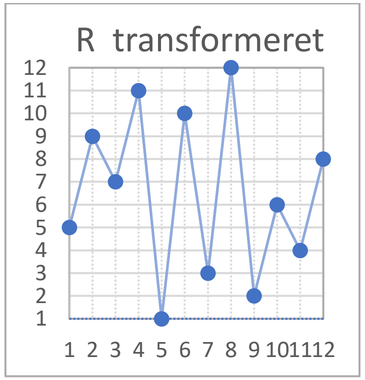
e gis fis b c a d h cis f es g

$(1,5) \rightarrow (5,1)$ og $(1,5) \rightarrow (8,12)$ og $(8,12) \rightarrow (12,8)$
$(3,7) \rightarrow (7,3)$ og $(3,7) \rightarrow (6,10)$ og $(6,10) \rightarrow (10,6)$
$(2,9) \rightarrow (9,2)$ og $(2,9) \rightarrow (4,11)$ og $(4,11) \rightarrow (11,4)$

De små tal er de tre tone- eller punktvalg. Diagrammet bliver:







Vi ser, at den transformerede række er lig rækken selv (se nærmere næste afsnit). Omvendingen er lig rækken baglæns. Som det fremgår af figuren, er rækken endvidere symmetrisk omkring centrum. Rækken og krebsgangen er identiske, hvilket er karakteristisk for netop disse rækker. Der er således kun to varianter eller omvendinger for disse rækker. Mængden af rækkerne, der symmetriske omkring begge diagonalakser, er således en fællesmængde i de to mængder af hhv. rækker symmetriske omkring diagonalakserne og rækker symmetriske omkring centrum.

Vi tæller antallet. Hver tone fastlægger 3 andre. Ligger tonen på diagonal, så vi, at der yderligere må ligge en tone på samme daigonalakse, samtidig er der to billedpunket ved spejling i den anden akse, altså er der også her fastlagt tra andre punkter eller toner. Vi får så således 12 mulige valg første gang, anden gang 8 mulige valg og tredje gang 4 muliger valg, det giver i alt: $12 \cdot 8 \cdot 4 = 384$ rækker.

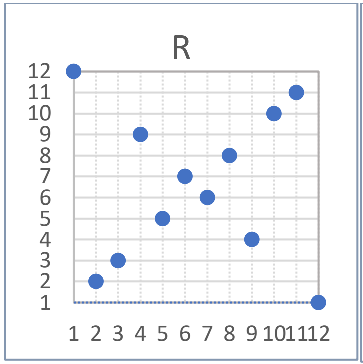
En delmængde af denne udgør rækker, hvor punkterne udelukkende ligger på diagonalerne. Som nævnt er diagonalernes formler (x,x) og $(13 - x,x)$, altså hhv. punkterne (1,1), (2,2) . . . (12,12) på 1. diagonalen og (1,12), (2,11) . . . (11,2) og (12,1) på 2. diagonalen. Da punkterne ligger symmetrisk, nøjes vi med at bestemme binomialkoefficienter for $n = 6$ og $r = 0 \dots 6$, r = 0 er den anden diagonalakse.
Summen bliver $1+ 6 + 15 + 20 + 15 + 6 +1 = 64$.

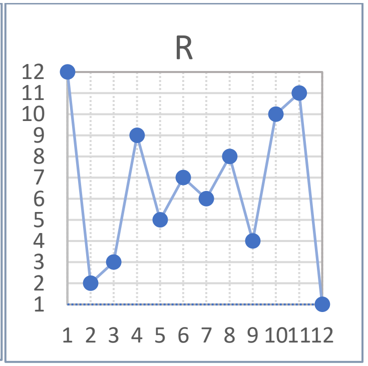
Der er 64 rækker, hvor de 32 er de andre rækker baglæns. Vi vil danne en af disse rækker:

Rækkenummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tonehøjde	12	2	3	9	5	7	6	8	4	10	11	1

h cis d gis e fis f g es a b c

Vi indtegner rækken i et diagram.





.

Den transformerede række identisk med rækken

Vi bemærker, at ved symmetrien omkring 1. diagonalakse gælder der, at den transformerede række er identisk med den oprindelige række ved ligningen (*r,t*) = (*t,r*). Vi kan godtgøre dette ved at opskrive tonehøjderne i talorden 1 til 12, som den øverste række i vores skema. Betragter vi den ovenfor nævnte række der er symmetrisk om 1. diagonalakse

Rækkenummer (*r*)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tonehøjde (*t*)	8	3	2	12	5	10	11	1	9	6	7	4

g d cis h e a b c gis f fis es

Fås den transformerede række

Rækkenummer (*t*)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tonehøjde (*r*)	8	3	2	12	5	10	11	1	9	6	7	4

g d cis h e a b c gis f fis es

Den transformerede række er dentisk med den oprindelige som ventet. Den tranformerede række er netop rækkerne, der er symmetriske om 1. diagonalaksen. Vi så, at der findes 46080 rækker med denne egenskab og ikke flere.

Rækker symmetriske omkring centrum af diagrammet

Centrum ligger midt mellem 6 og 7 både mht. tonehøjde og rækkefølge. Dvs. at rækkenummer ligger symmetrisk omkring midten af x-aksen. Vi har 1 ↔ 12, 2 ↔ 11, 3 ↔ 10, 4 ↔ 9, 5 ↔ 8, 6 ↔ 7. Ligeledes ligger tonehøjderne symetrisk omkring midtpunktet af y-aksen. Dvs. de samme forhold gør sig gældende som for rækkenummerets vedkommende, vi har således 1 ↔ 12, 2 ↔ 11, 3 ↔ 10, 4 ↔ 9, 5 ↔ 8, 6 ↔ 7. Symmetrien omkring centrum svarer til en drejning på 180° i positiv eller negativ retning, eller som nævnt en spejling i en lodret og vandret akse.

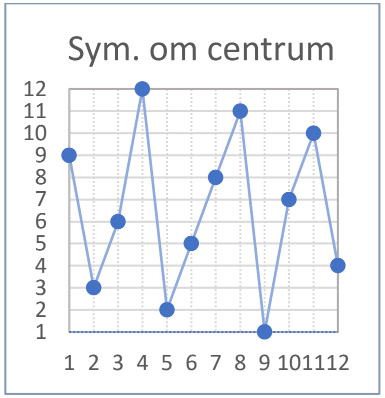
Vi konstruerer en række med disse egenskaber.

Rækkenummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tonehøjde	9	3	6	12	2	5	8	11	1	7	10	4

gis d f h cis e g b c fis a es

Vi ser, at der gælder, at summen af punkterne mht. tonehøjde, der ligger symmetrisk omkring midten af rækken, er 13, og dette gælder *altid*. Generelt har vi formlen for den symmetriske række omkring centrum: $(r, t) \rightarrow (13 - r, 13 - t)$.

Vi plotter rækken ind i et diagram:



Vi ser at rækken er symmetrisk omkring centrum. Vi ser også, at rækken ikke er symmetrisk med hensyn til diagonalakserne.
Alle omvendinger er naturligvis også symmetriske omkring centrum.

Omvending af rækken bliver   4 10 7 1 11 8 | 5 2 12 6 3 9   es a fis c b g e cis h f d gis

Krebsgangen er så denne række baglæns:

Krebsgang   9 3 6 12 2 5 | 8 11 1 7 10 4   som er identisk med rækken selv.

Det er en vigtig egenskab ved rækker, der er symmetriske om centrum, at krebsgangen er identisk med rækken selv og omvendingen er identisk med rækken baglæns. Der er således kun to omvendinger.

Vi vil nu dreje en række symmetrisk om centrum 90° i positiv retning.
Først danner vi en række der er symmetrisk om centrum.

Rækkenummer	1	2	3	4	5	6	|	7	8	9	10	11	12	
Tonehøjde	7	10	8	9	1	2	|	11	12	4	5	3	6	fis a g gis c cis b h es e d f

Vi begynder et eller andet sted og skriver resten af tallene, idet vi benytter, at tonetallene symmetriske om midtpunktet altid summer til 13.

Vi kunne nu dreje papiret som før, men vil denne gang se på matematikken i forbindelsen med drejningen på 90° i positiv retning. Ved drejningen gælder der, at rækkenummer r bliver til tonehøjde t, tonehøjde bliver til rækkenummer, men hvor rækkenummer f.eks. 5 bliver til tonehøjden 5, dvs. $r \to t$, bliver tonehøjden til rækkenummer $13 - t$, dvs. $t \to 13 - t$. I alt har vi $(r, t) \to (13 - t, r)$.
Ved lignende overvejelser har vi formlen for den symmetriske række omkring centrum: $(r, t) \to (13 - r, 13 - t)$.
Vi vil nu konstruere den drejede symmetriske række.

Rækkenummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sym. række	7	10	8	9	1	2	11	12	4	5	3	6

Vi bruger formlen og får

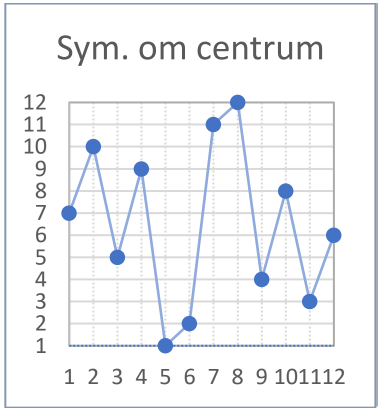
$(1,7) \to (13-7, 1) = (6,1)$, $(2,10) \to (13-10,2) = (3,2)$
$(3,8) \to (5,3)$ $(4,9) \to (4,4)$
$(5,1) \to (12,5)$ $(6,2) \to (11,6)$ osv.

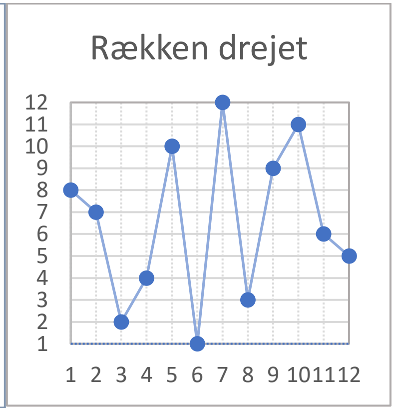
Rækkenummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Drejede række	8	7	2	4	10	1	12	3	9	11	6	5

g fis cis es a c h d gis b f e

Vi ser, at den drejede række ligeledes er en række symmetrisk om centrum. Tonetallene, der ligger symmetrisk om midtpunktet af rækken, summer netop til 13. Dette er en nødvendig og tilstrækkelige betingelse for symmetri omkring centrum af diagrammet.
For disse rækker, der er symmetriske omkring centrum gælder, at de sidste 6 toner er krebsgangen af de 6 første.

Diagrammerne for de to rækker bliver

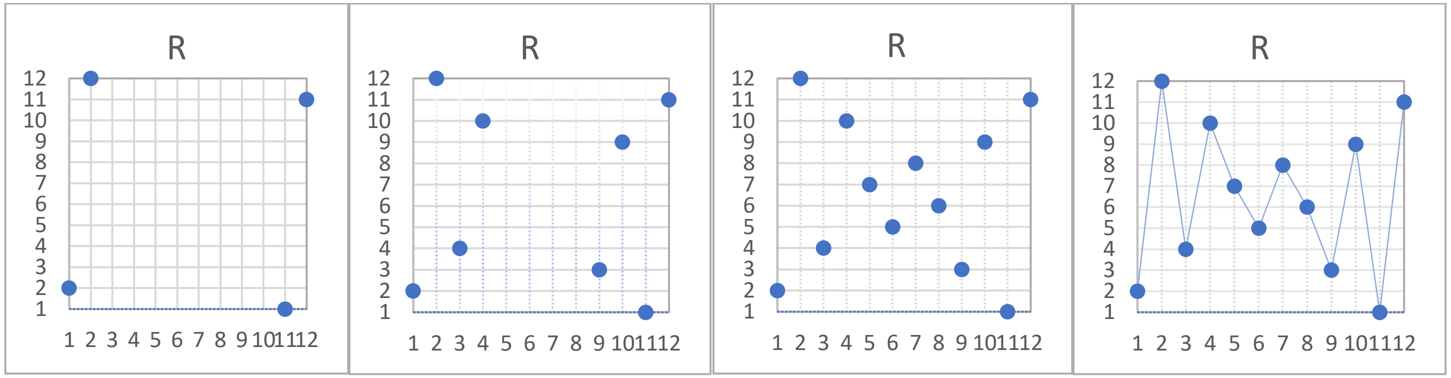




Vi ser igen, at den drejede række også er symmetrisk om centrum. Envidere er den omvendingen/baglænsrækken af den transformerede række.
En række symmetrisk omkring centrum har altså almindeligvis 2 strukturforskellige rækker og almindeligvis 4 varianter.
Hvor mange rækker symmetriske om centrum findes der?
Der er $12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 46080$ rækker. Der er nemlig 12 valgmuligheder for den første tone, 10 for den anden, da den symmetriske tone allerede er fastlagt, 8 for den tredje, 6 for den fjerde og 4 for den femte og 2 for den sjette.

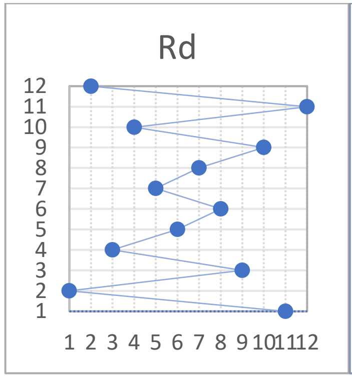
Den drejede række identisk med rækken

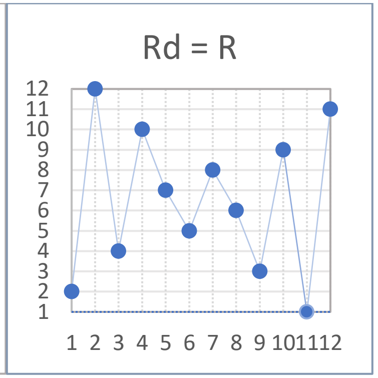
Som regel har vi, at rækken selv og den drejede række er strukturforskellige. Vi har allerede bestem en gruppe rækker, hvor der kun var én struktur, nemlig rækkerne, der var symmetriske om en eller begge diagonalakser. Også for en lille mængde af rækker symmetriske om centrum gælder dette. Det drejer sig om rækker, der er identiske med deres egen drejning på 90°, dvs. invariante under drejning. Denne mængde vil vi nu forsøge at bestemme. Først observerer vi, at punkterne på de to diagonaler (x,x) og $(x, 13 - x)$ ikke kan medtages i disse tilfælde. Hvis vi f.eks. har punktet (4,4), har vi umiddelbart punktet (9,9,) der ligger symmetrisk om diagrammets midtpunkt. Drejer vi nu diagrammet 90° i positiv retning, går punktet (4,4) over i punktet (9,4), dvs. vi har to punkter på 9. pladsen, da den drejede række skal være identisk med sig selv. Dette er naturligvis ikke lovligt. Punkter på diagonalakserne må følgelig undgås, når vi konstruerer rækkerne.



Vi har først valg punktet (1,2), der fastlægger 3 andre punkter. Nemlig symmetripunktet for det valgte punkt og det drejede punkt og dettes symmetripunkt, idet vi også benytter symmetriegenskaben om centrum. Derefter vælger vi et andet punkt (3,4) og foretager samme procedure. Nu er der to muligheder tilbage: punkterne (5,6) og som her (5,7), punktet (6,6) kan vi ikke bruge, da det ligger på diagonalaksen. Da vi afsatte punkterne, opdagede vi, at der var to muligheder på 5. pladsen, nemlig tonehøjden som her nr. 7 eller nr. 6.
Rækken bliver således 2 12 4 10 7 5 | 8 6 3 9 1 11 cis h es a fis e g f d gis c b.

Vi drejer rækken og ser, at punkterne ligger fuldstændigt på de samme steder, som på den ikke drejede række ovenfor. Vi tegner stregerne og får rækken R, altså Rd = R eller, som vi vil benytte, R = Rd.:





Vi vil også benytte skemaet til at bestemme denne drejede række:

Rækkenummer 1 2 3 4 5 6 | 7 8 9 10 11 12 (1,2) → (11,1) (3,4) → (9,3) (5,7) → (6,5)
Drejet række 2 12 4 10 7 5 | 8 6 3 9 1 11
1 1 2 2 3 3 3 3 2 2 1 1

De små tal refererer til den valgte tones fire forskellige placeringer.

Den drejede række bliver således 2 12 4 10 7 5 | 8 6 3 9 1 11 cis h es a fis e g f d gis c b, som er identisk med den oprindelige.

Som nævnt var der en variation med 4. tone på plads 3, nemlig med den 6. tone på plads 5. Vi bruger skemaet til at beregne denne.
Den oprindelige række er

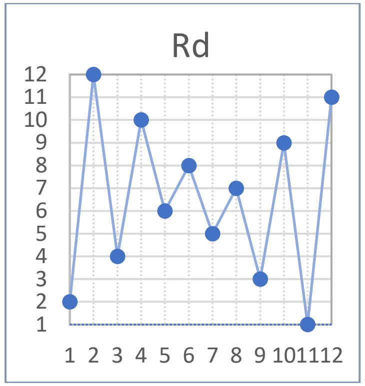
2 12 4 10 6 8 | 5 7 3 9 1 11 cis h es a f g e fis d gis c b.

Drejer vi rækken får vi

Rækkenummer 1 2 3 4 5 6 | 7 8 9 10 11 12 (1,2) → (11,1) (3,4) → (9,3) (5,6) → (7,5)
Drejet række 2 12 4 10 6 8 | 5 7 3 9 1 11
1 1 2 2 3 3 3 3 2 2 1 1

Vi ser den drejede række er identisk med den oprindelige række.

Diagrammet bliver



I diagrammerne er de nummer 2,2 og 2,1 se s. 19.

Hvor mange af disse rækker findes der.

Første tone kan vælges på 10 måder, anden tone på 6 måder og sidste tone på 2 måder, da vi ikke kan benytte diagonalakserne. Vi har $10 \cdot 6 \cdot 2 = 120$. Der er 120 rækker i denne gruppe, heraf er de 60 rækker de andre 60 rækker baglæns. 60 rækker med hver to omvendinger

Hvad angår varianter eller omvendinger, hvad man nu vil kalde dem, har vi, at en vilkårlig tolvtonerække almindeligvis har 8 varianter. En række symmetrisk har den højst 4 varianter. Nogle specielle symmetriske rækker har kun to varianter, nemlig: (1) Rækker, der er symmetriske om både 1. og 2. diagonalen, har to kun varianter. (2) Rækker, der er symmetriske om centrum, hvor den drejede rækker er identisk med rækken selv, har to varianter.

Fra et musikalsk synspunkt udgør de 120 rækker et musikværk i 5 afdelinger eller 10 sektioner.

Den fem afdelinger er på hver 24 rækker, udviklet fra hhv. 2. til 6. tone med baglænsrækken umiddelbart efter rækken: Diagrammer 1 eller Tabel 1.

Eller man kan spille rækkerne i 10 sektioner på hver 12 rækker. Her udviklet fra 2. tone op til 11. tone: Diagrammer 2 eller Tabel 2. Teoretisk set udviklet fra 7 til 11, her jeg har dog blot benyttet baglænsrækkerne. Toneleje, tonelængde, dynamik, frasering er ikke fastlagt. Et ideelt instrument ville være et strygeinstrument og muligvis et blæseinstrument.

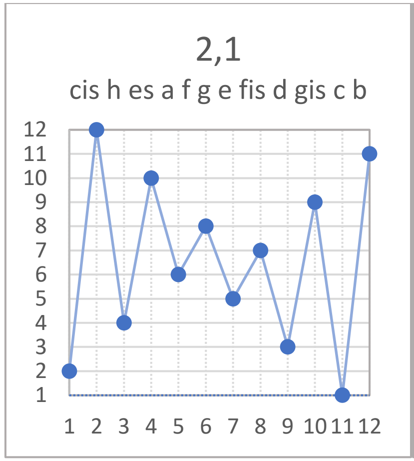
Muligvis kunne man spille begge versioner samtidig.

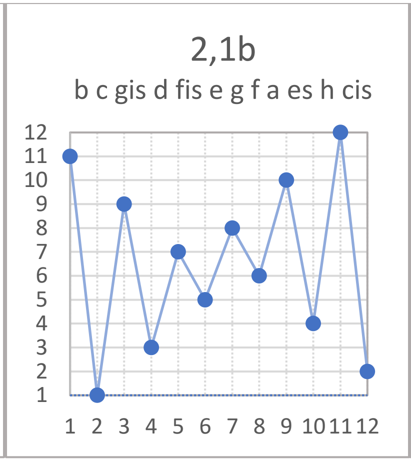
Herefter følger diagrammer over samtlige 120 rækker, Rækken = Rækken drejet eller R = Rd.

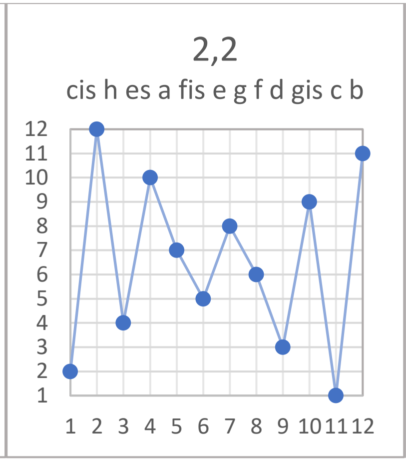
DIAGRAMMER 1

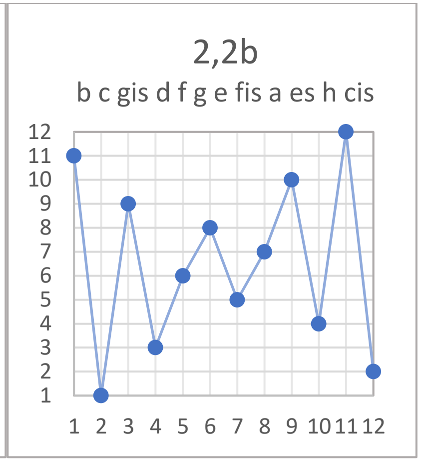
R = Rd

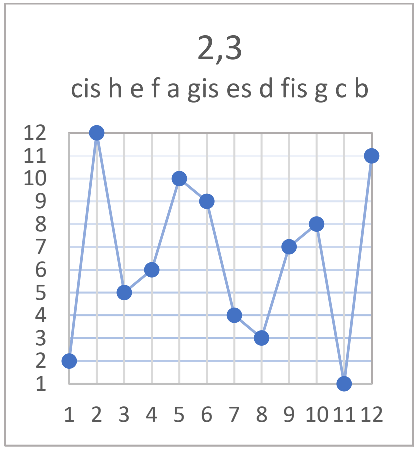
Udviklet fra 2

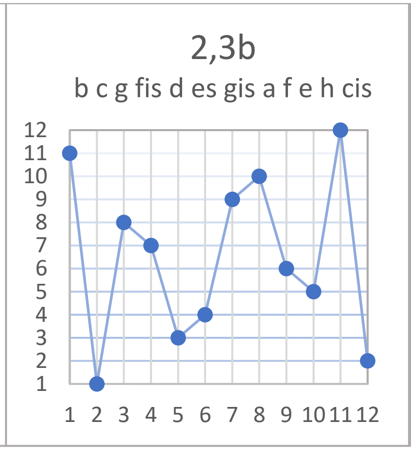


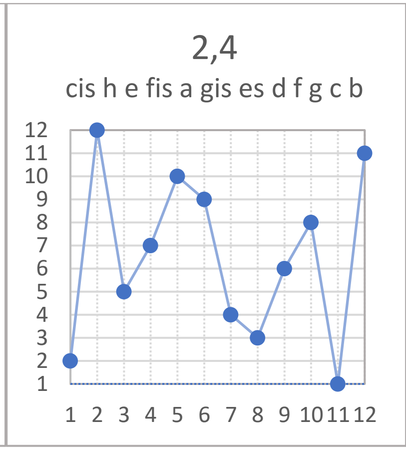


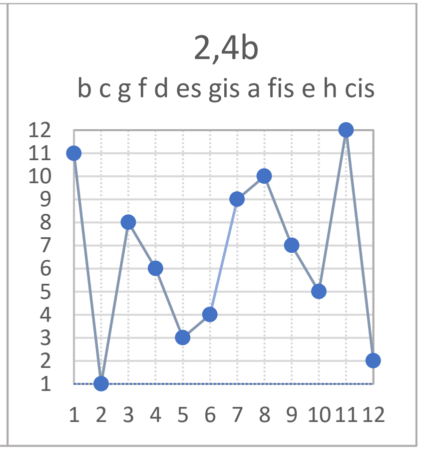








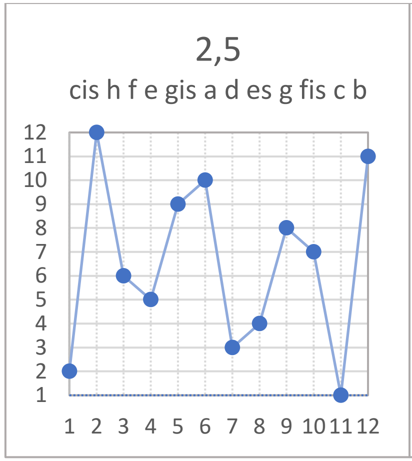


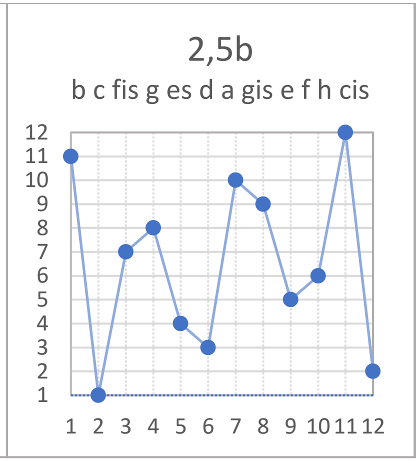


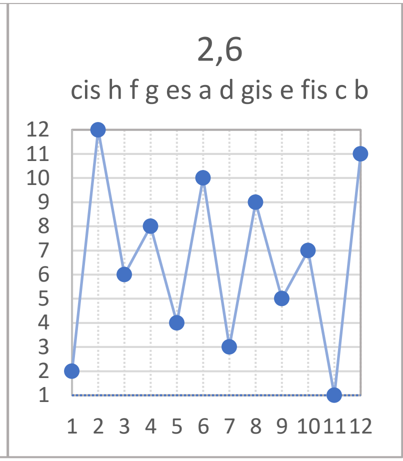
DIAGRAMMER 1

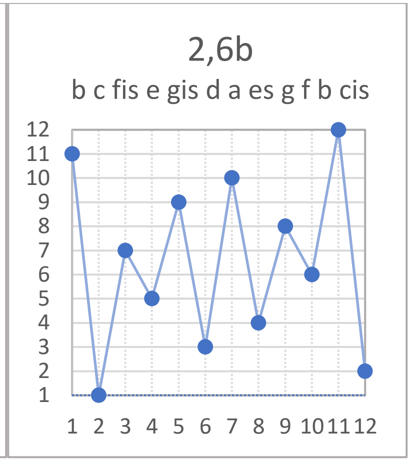
R = Rd

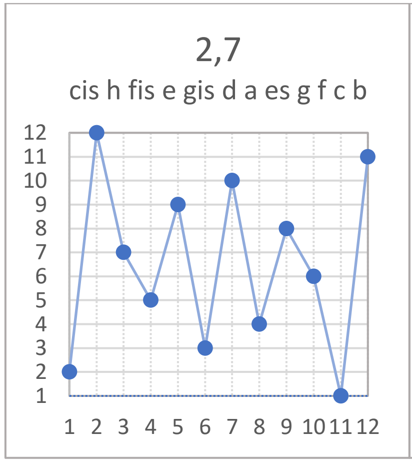
Udviklet fra 2

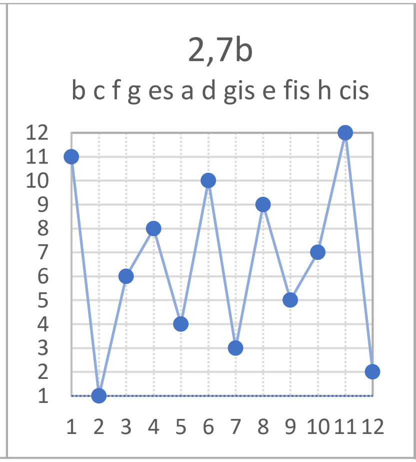


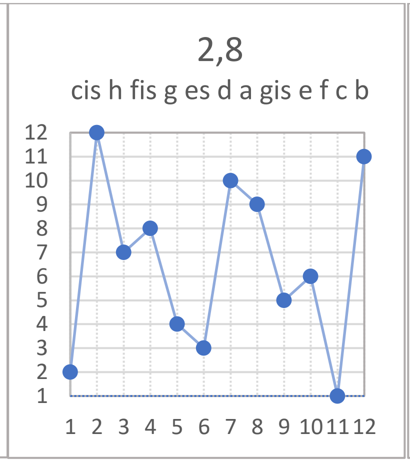


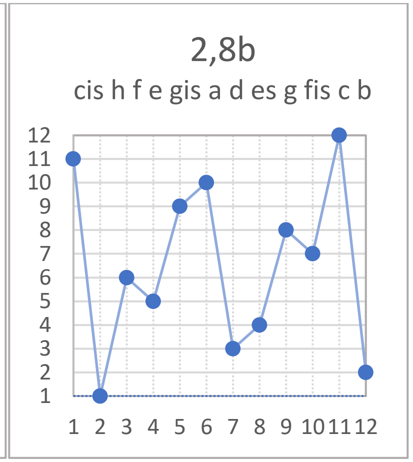






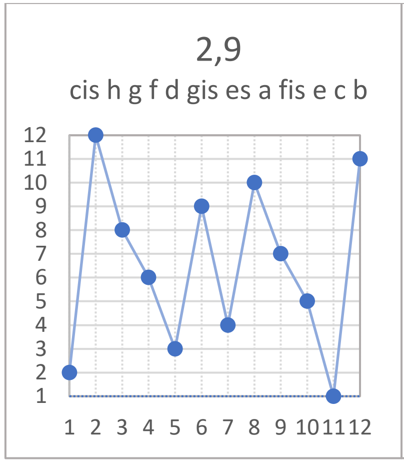


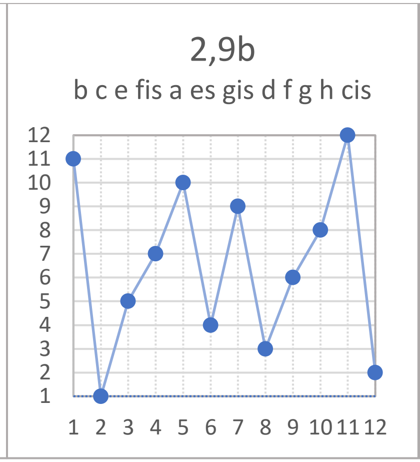


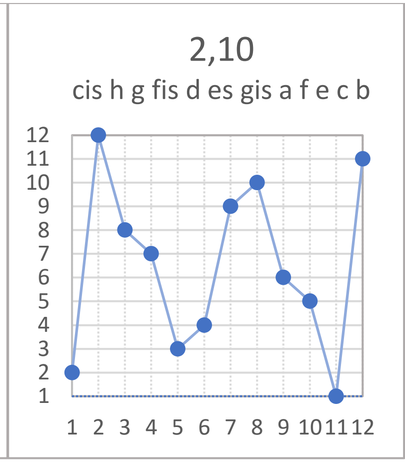


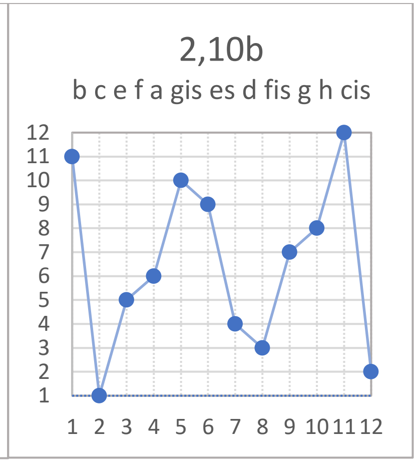
DIAGRAMMER 1
R = Rd

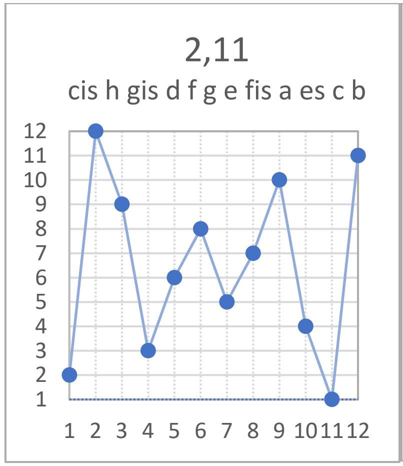
Udviklet fra 2

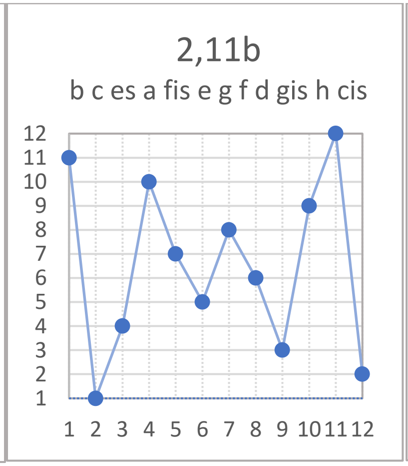


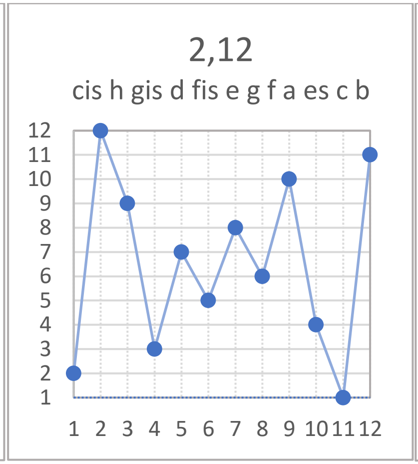


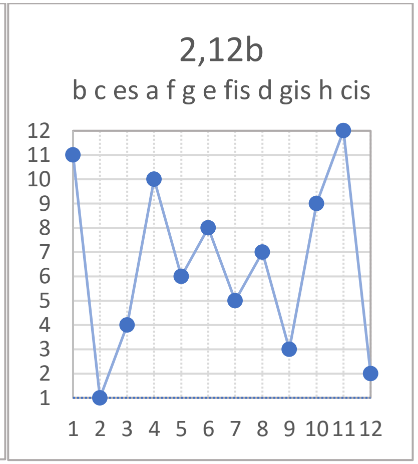






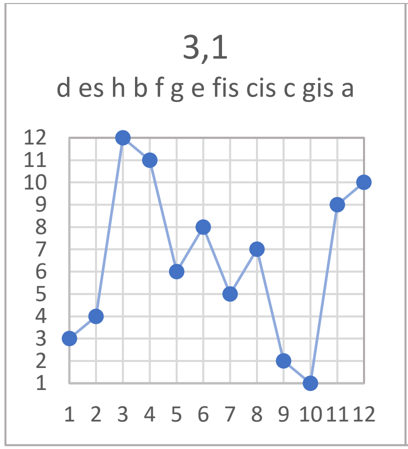


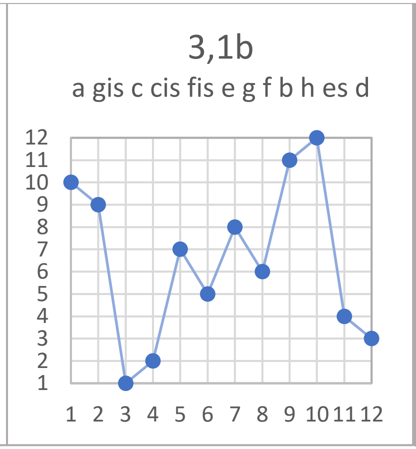


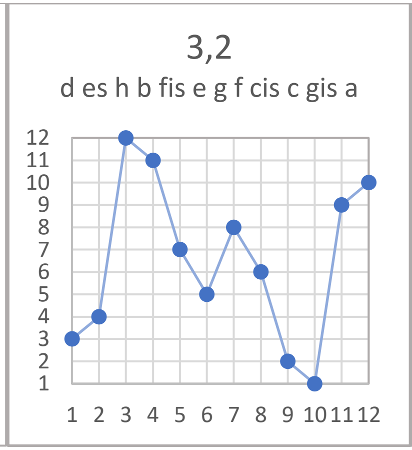


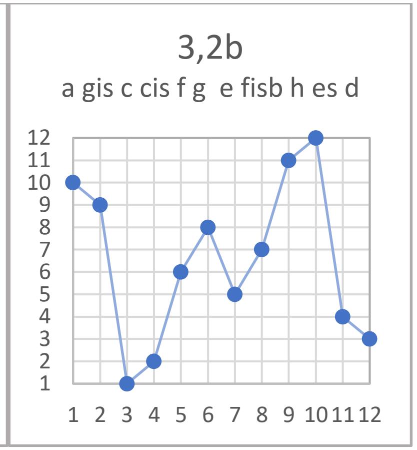
DIAGRAMMER 1
R = Rd

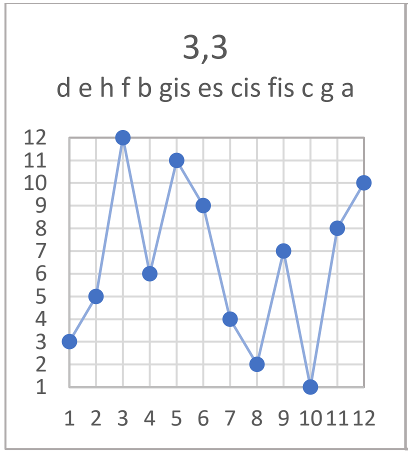
Udviklet fra 3

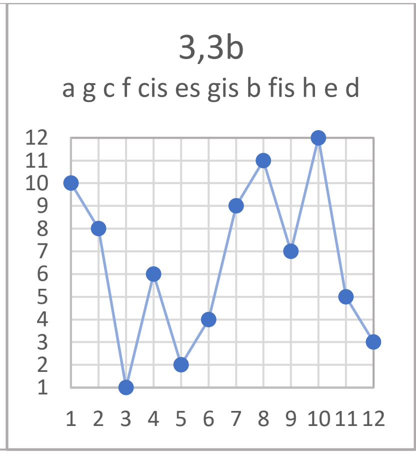


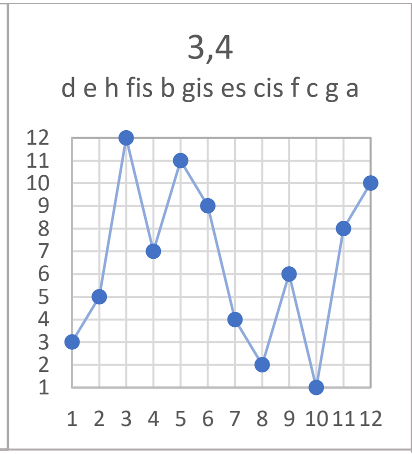


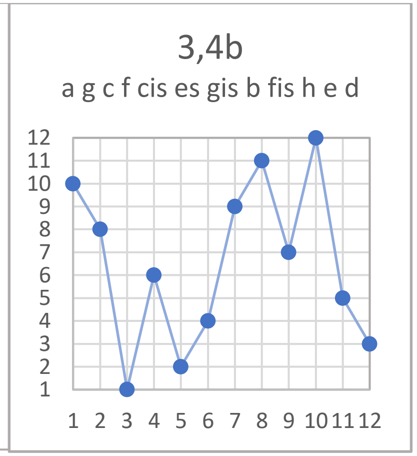






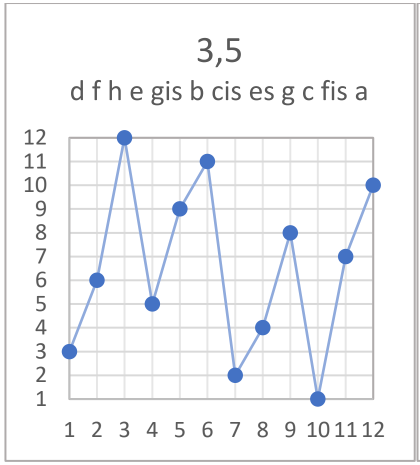


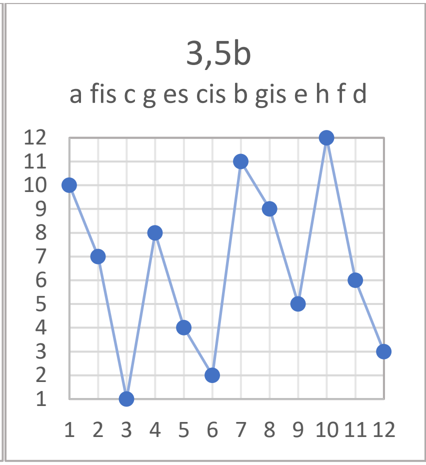


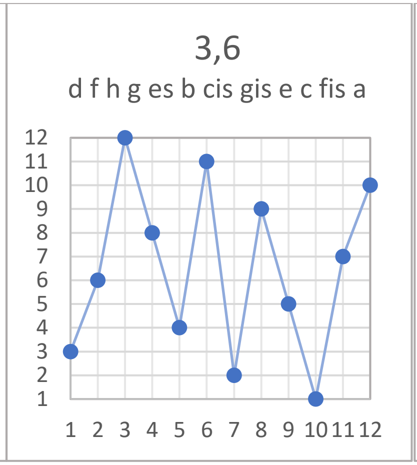


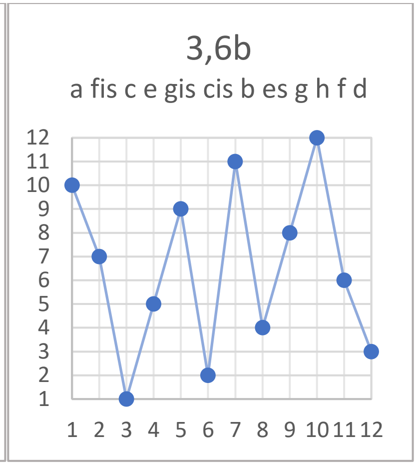
DIAGRAMMER 1
R = Rd

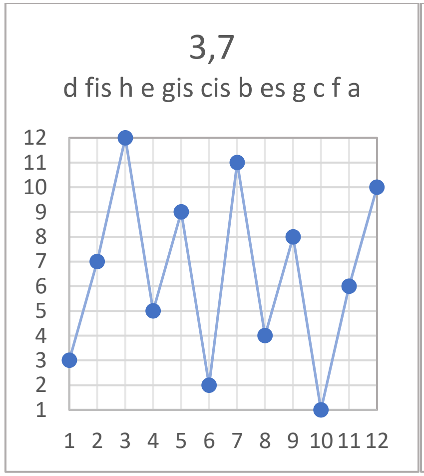
Udviklet fra 3

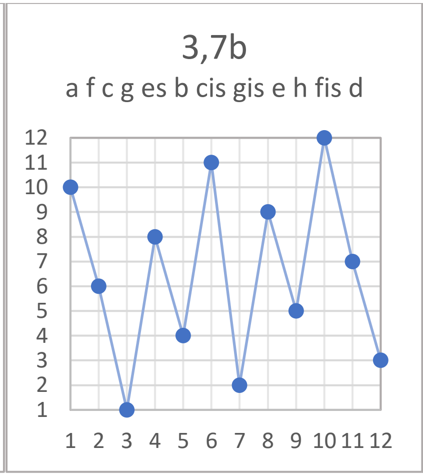


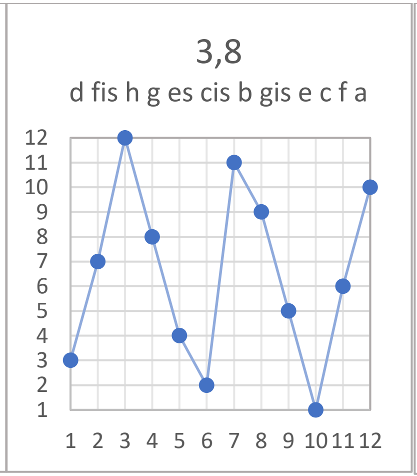


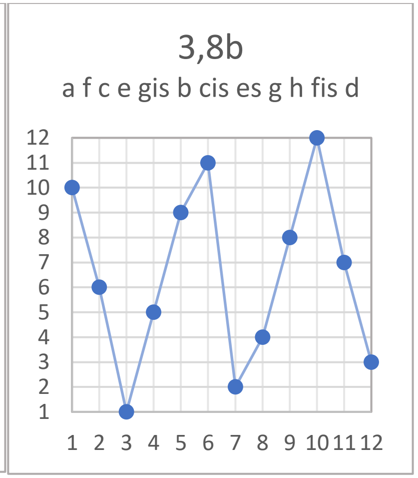








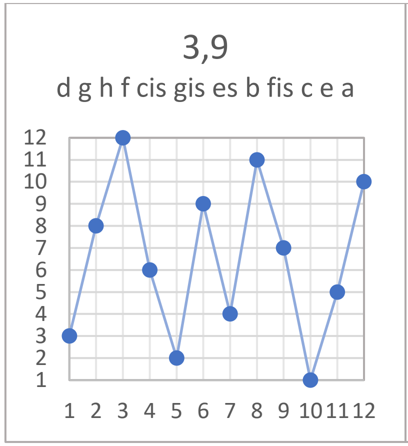


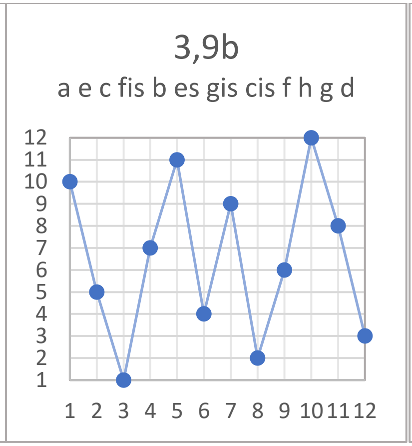


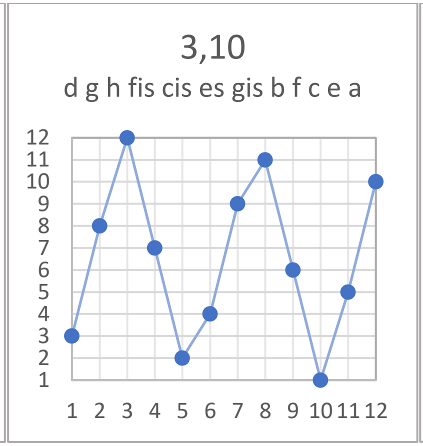
DIAGRAMMER 1

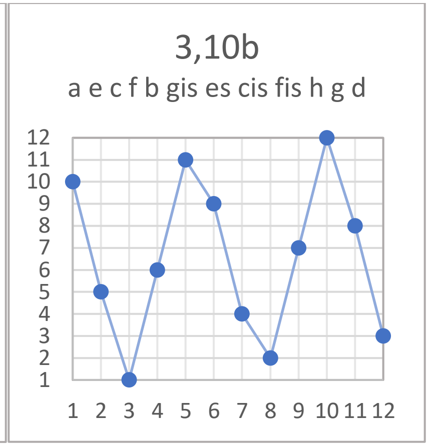
R = Rd

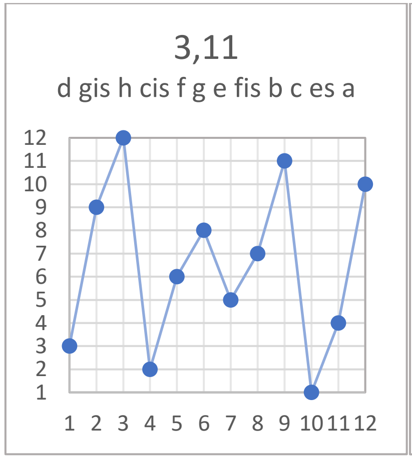
Udviklet fra 3

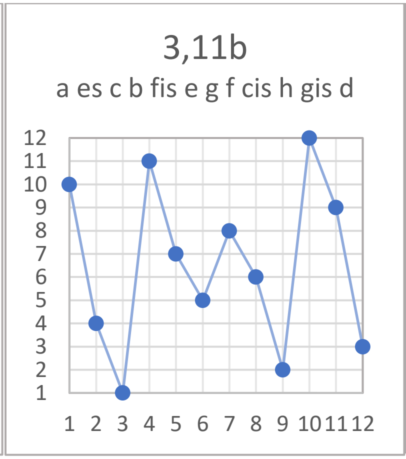


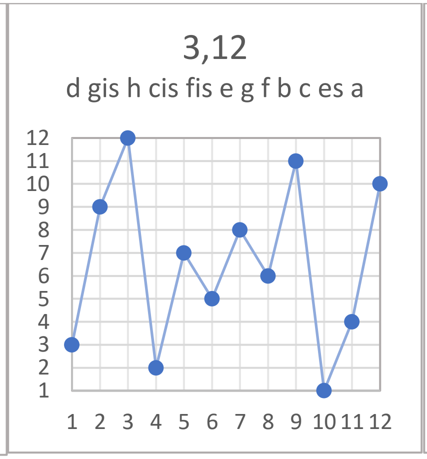


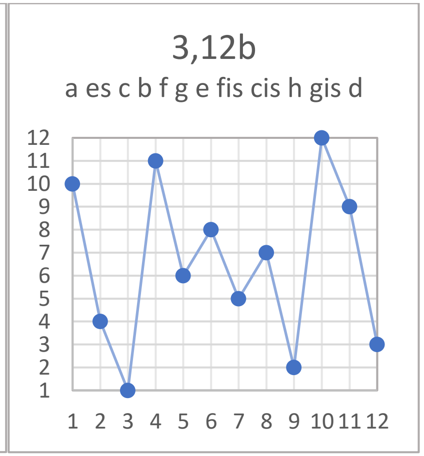








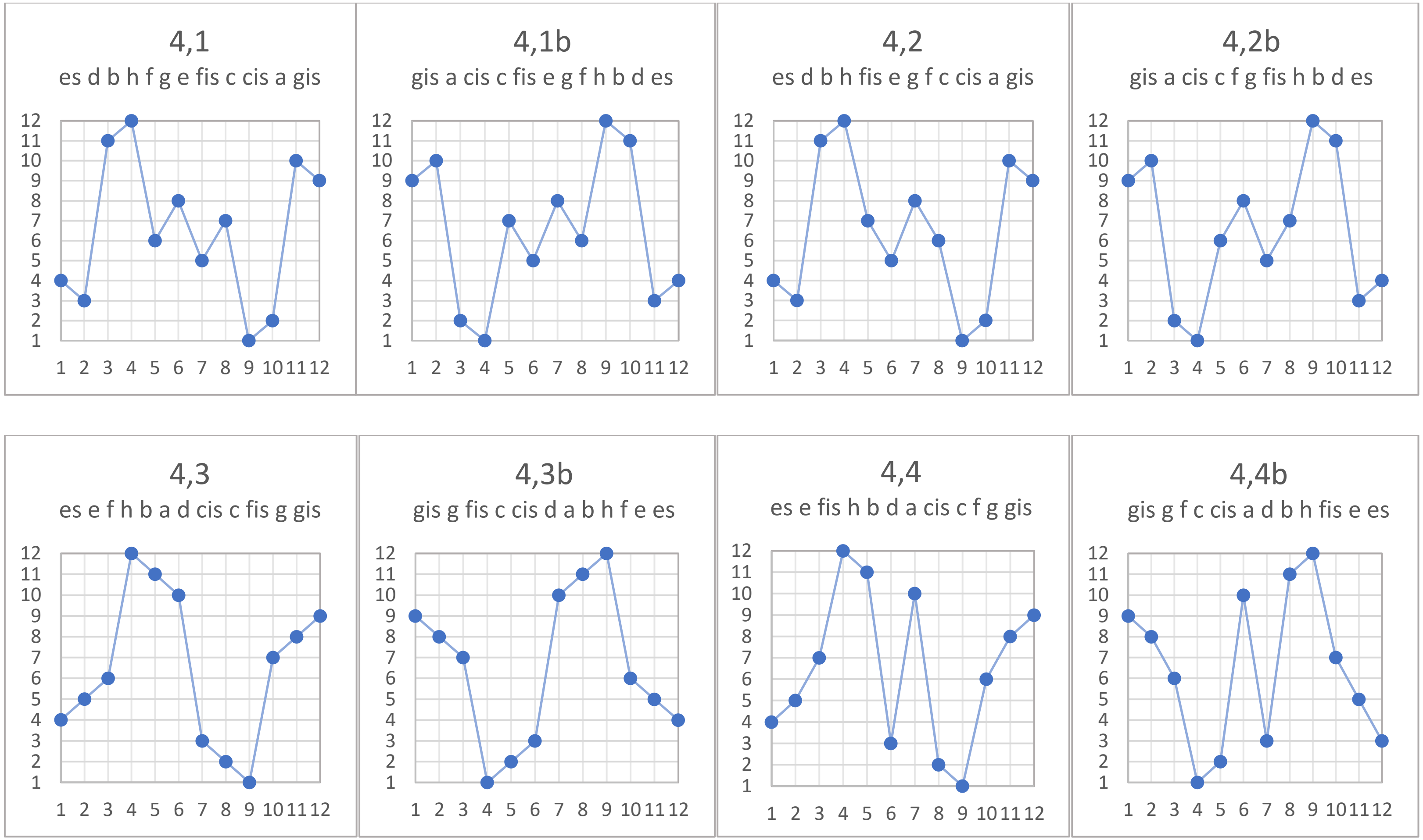




DIAGRAMMER 1

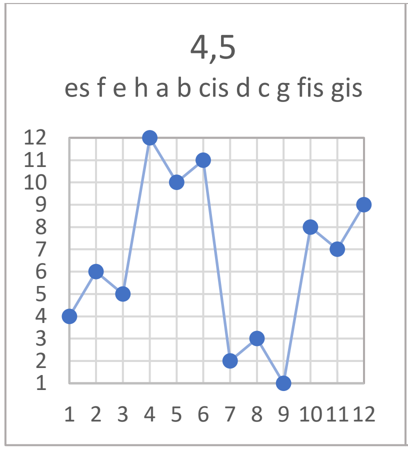
R = Rd

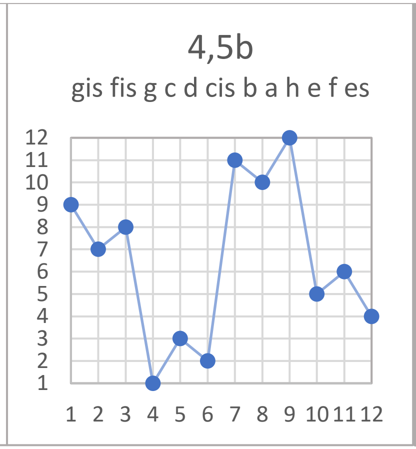
Udviklet fra 4

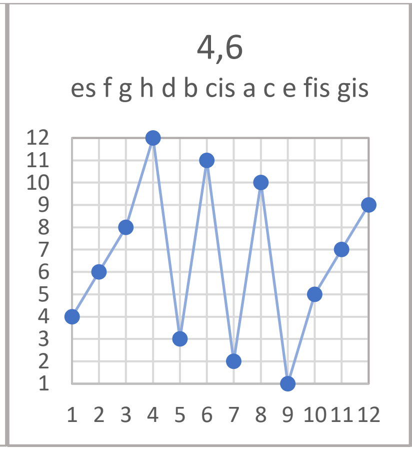


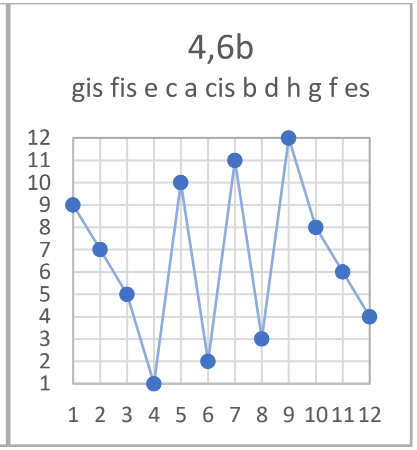
DIAGRAMMER 1
R = Rd

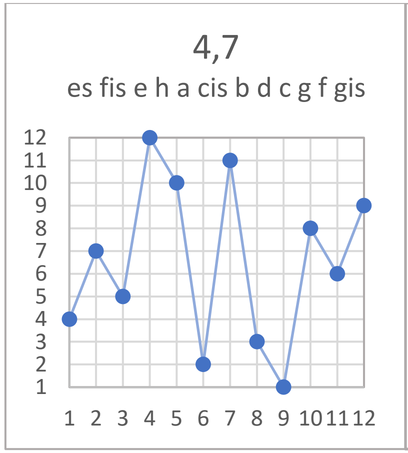
Udviklet fra 4

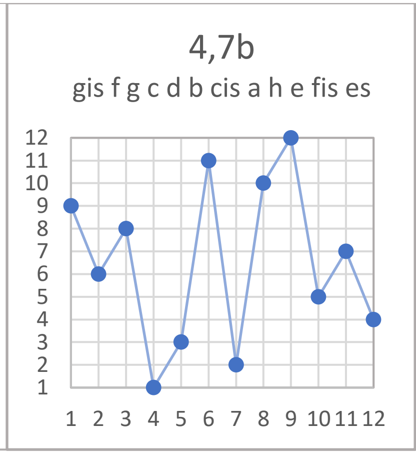


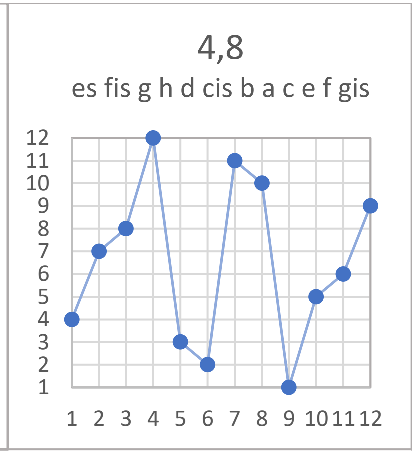


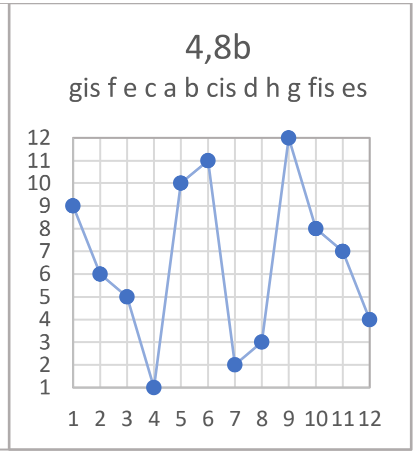












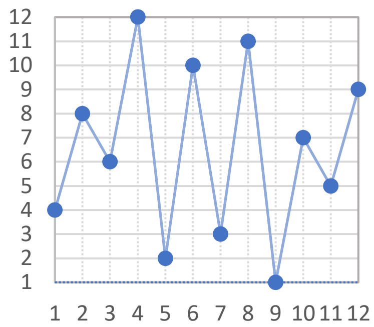
DIAGRAMMER 1

R = Rd

Udviklet fra 4

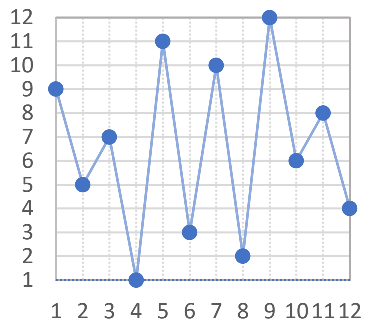
4,9

es g f h cis a d b c fis e gis



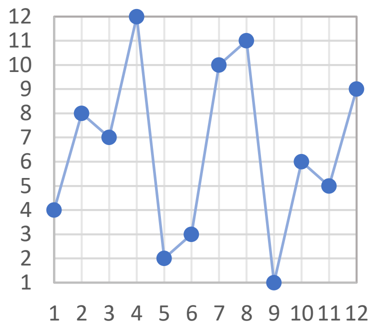
4,9b

gis e fis c b d a cis h f g es



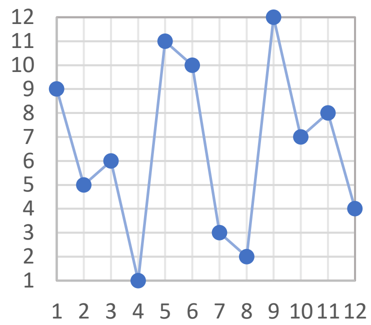
4,10

es g fis h cis d a b c f e gis



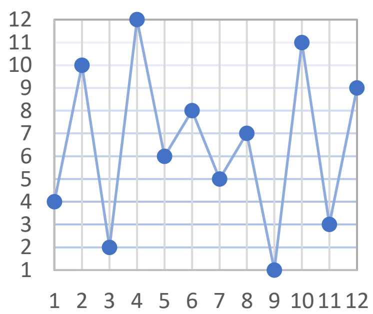
4,10b

gis e f c b a d cis h fis g es



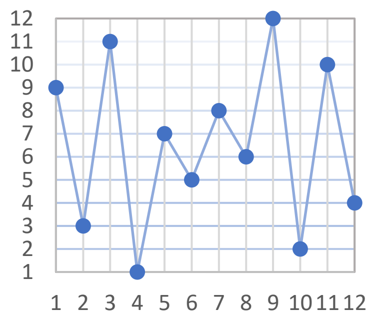
4,11

es a cis h f g e fis c b d gis



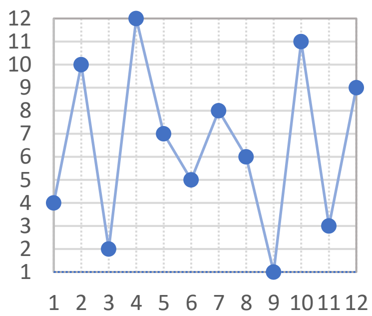
4,11b

gis d b c fis e g f h cis a es



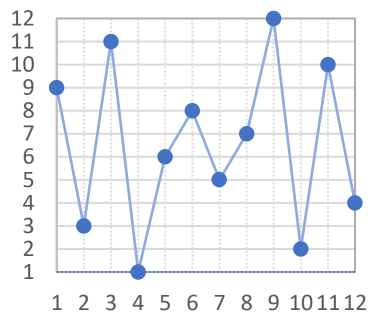
4,12

es a cis h fis e g f c b d gis



4,12b

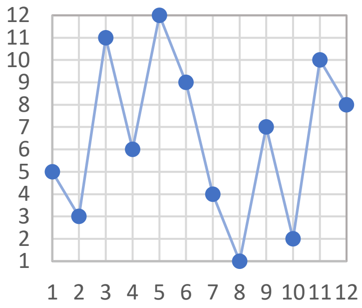
gis d b c f g e fis h cis a es



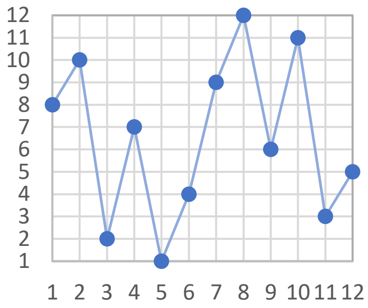
DIAGRAMMER 1
R = Rd

Udviklet fra 5

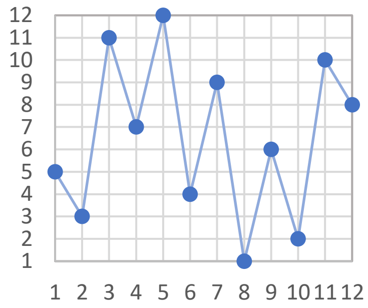
5,1
e d b f h gis es c fis cis a g



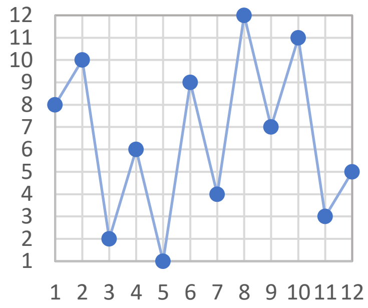
5,1b
g a cis fis c es gis h f b d e



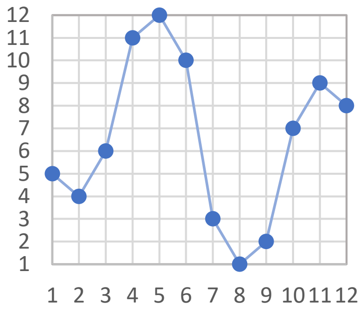
5,2
e d b fis h es gis c f cis a g



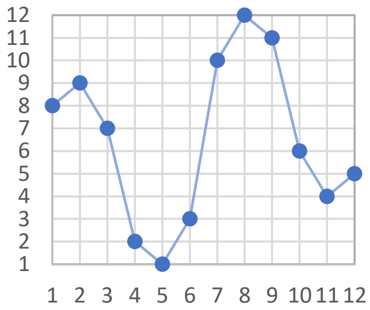
5,2b
g a cis f c gis es h fis b d e



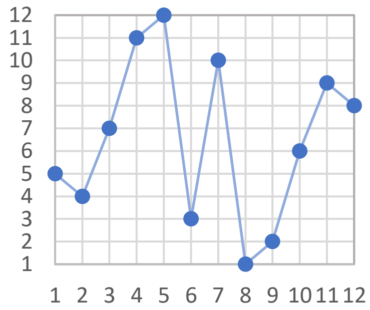
5,3
e es f b h a d c cis fis gis g



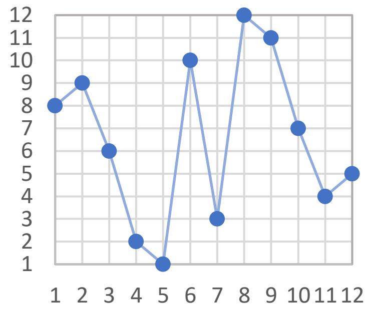
5,3b
g gis fis cis c d a h b f es e



5,4
e es fis b h d a c cis f gis g

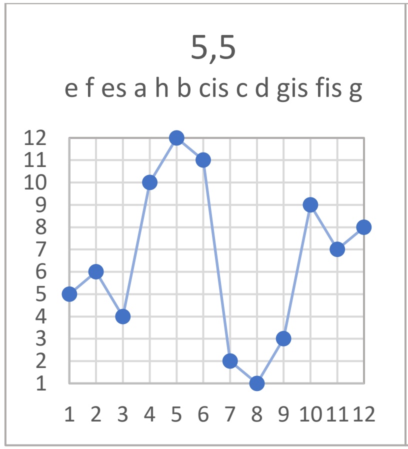


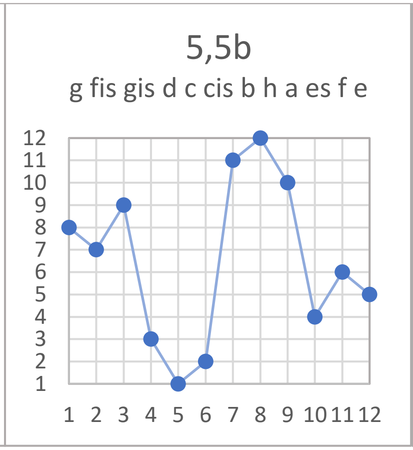
5,4b
g gis f cis c a d h b fis es e

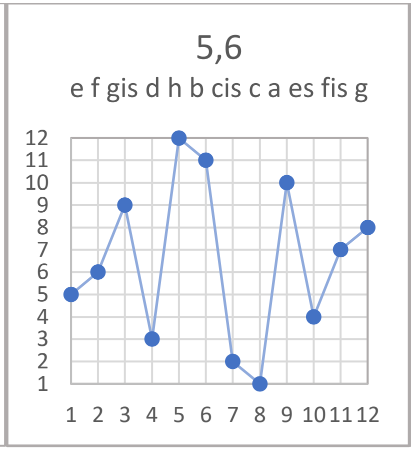


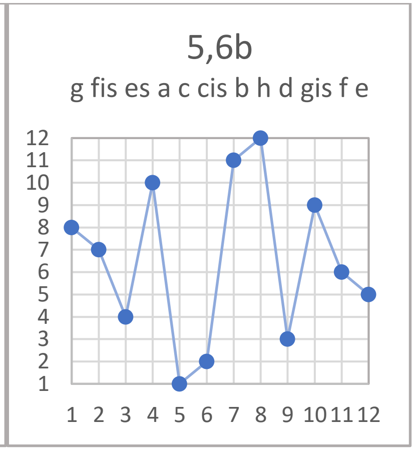
DIAGRAMMER 1
R = Rd

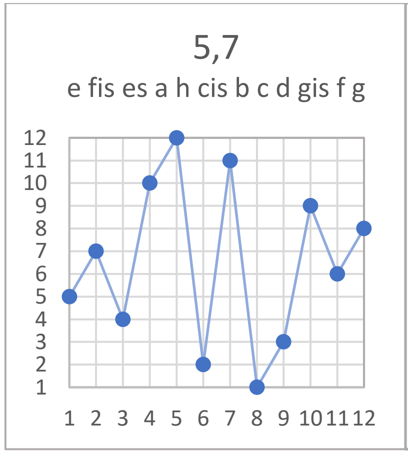
Udviklet fra 5

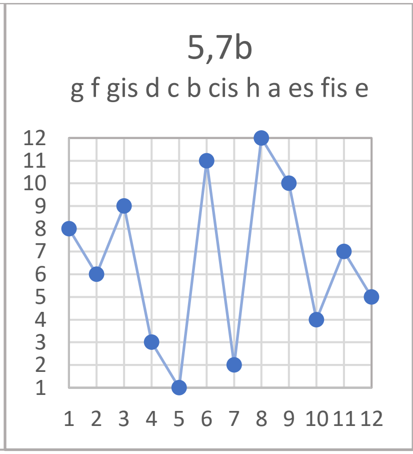


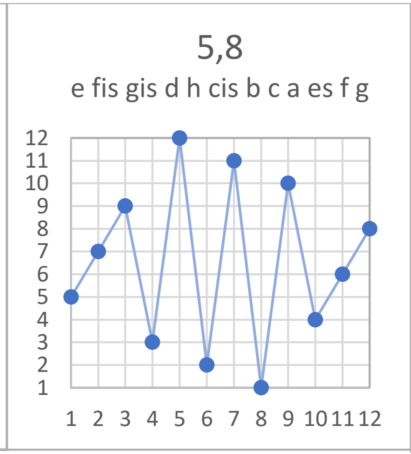


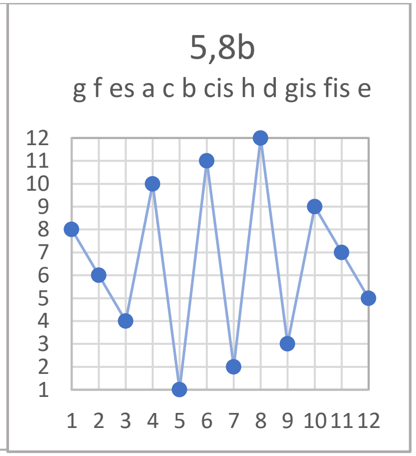






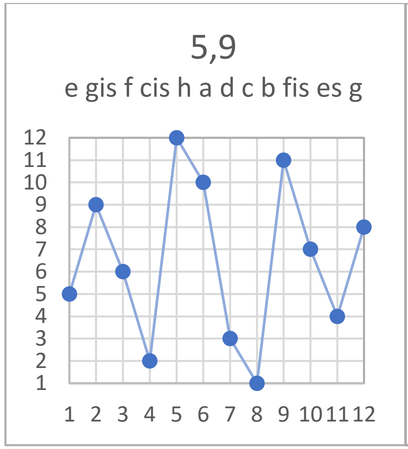


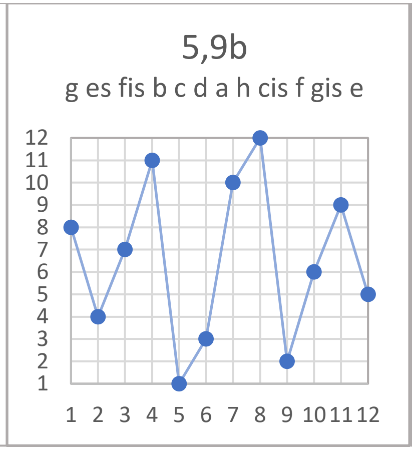


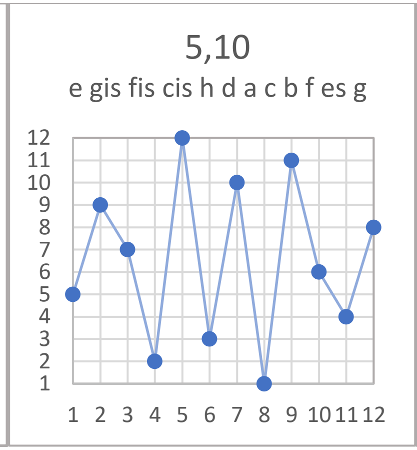


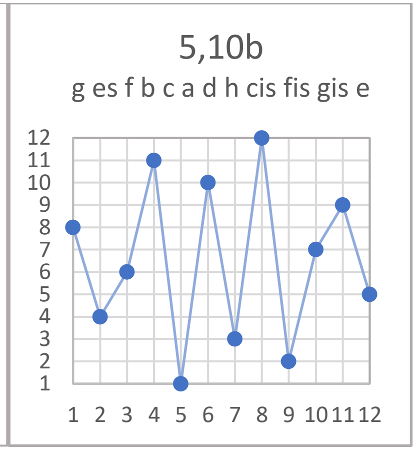
DIAGRAMMER 1
R = Rd

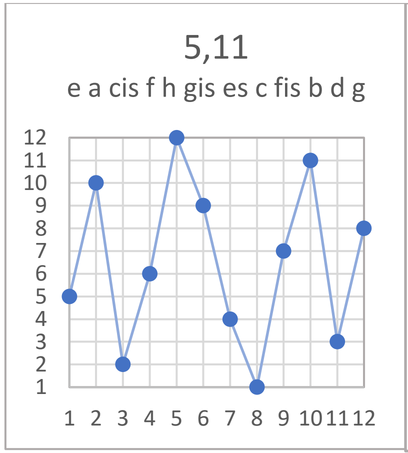
Udviklet fra 5

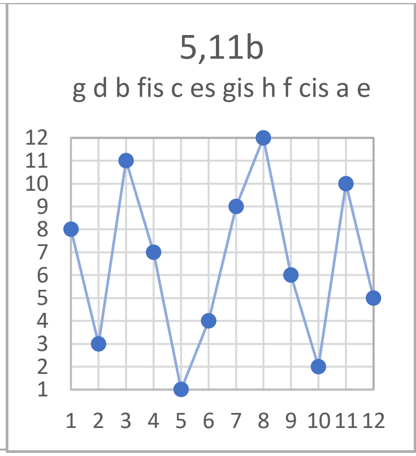


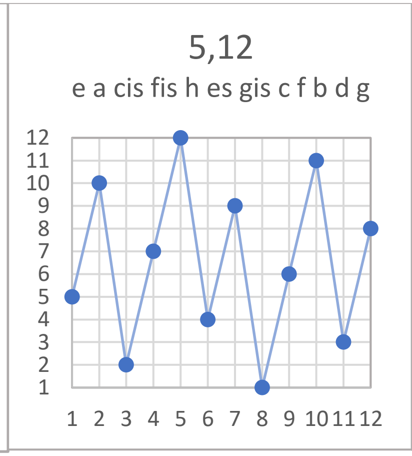


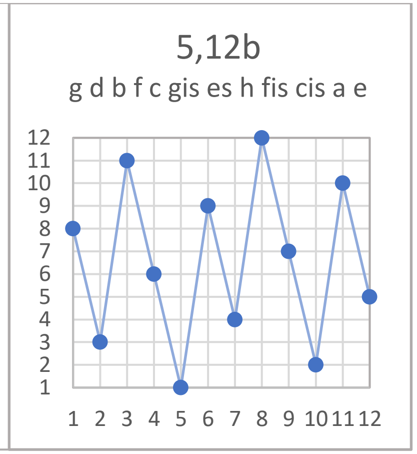






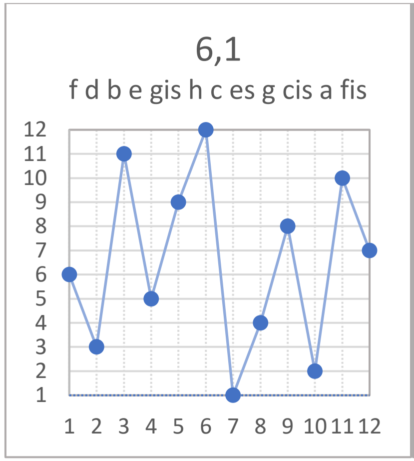


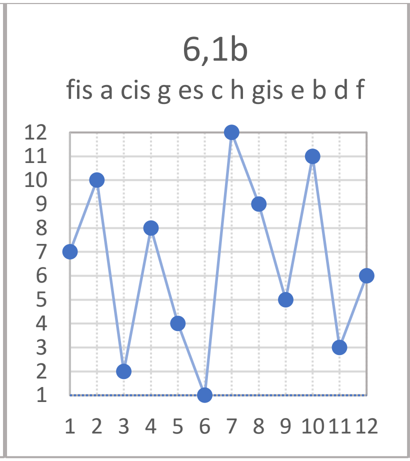


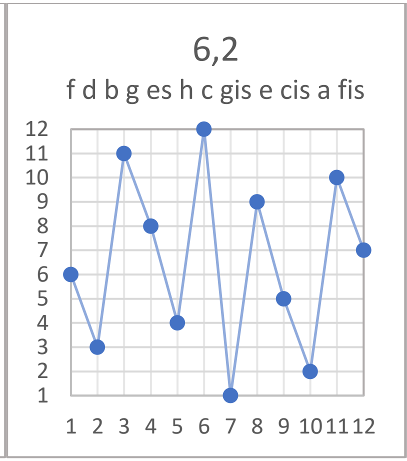


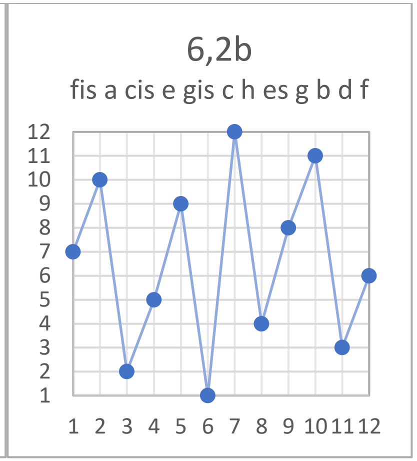
DIAGRAMMER 1
R = Rd

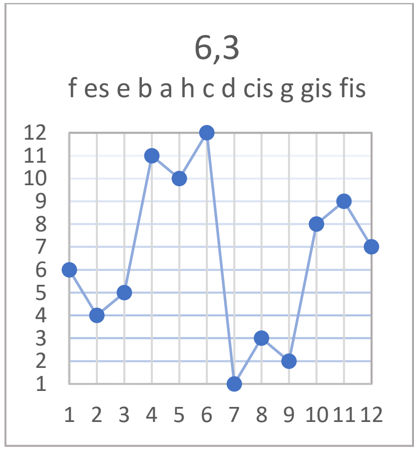
Udviklet fra 6

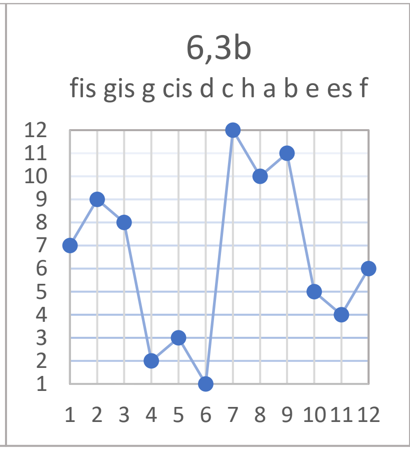


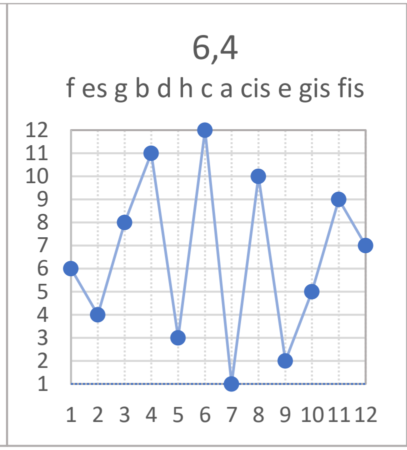


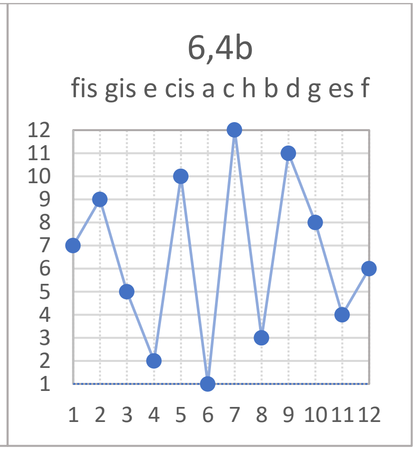






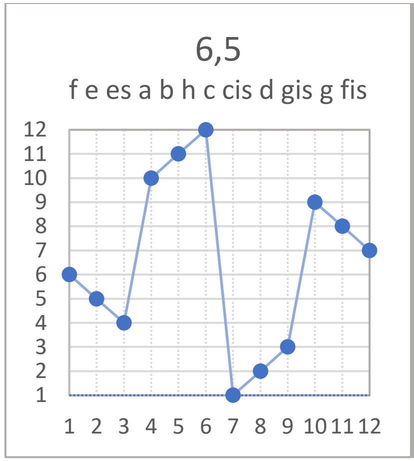


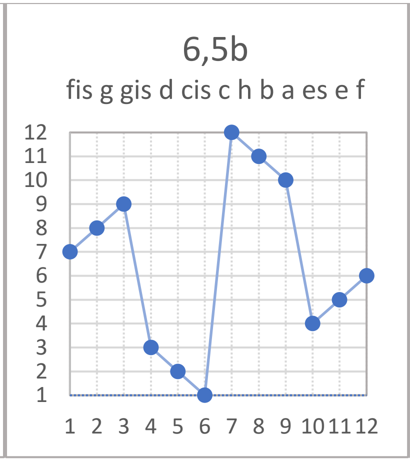


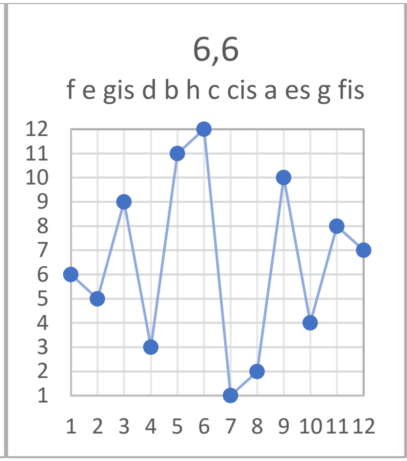


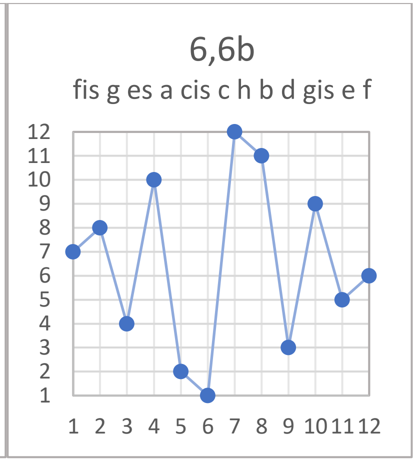
DIAGRAMMER 1
R = Rd

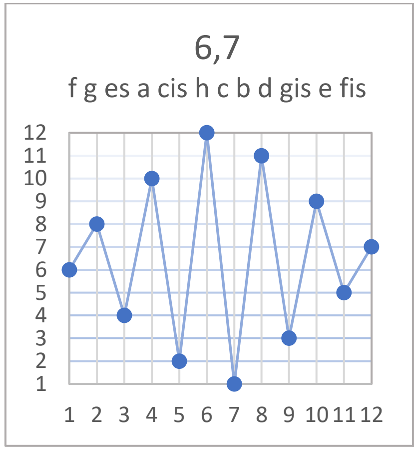
Udviklet fra 6

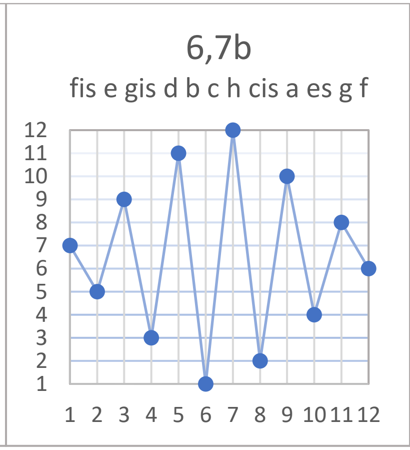


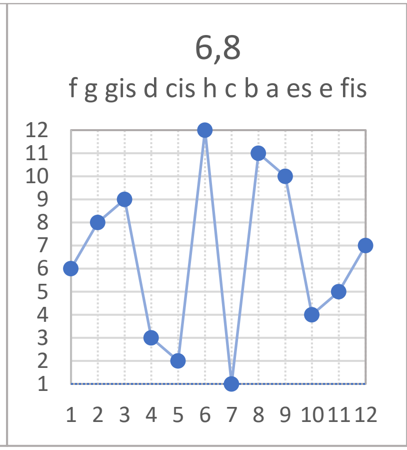


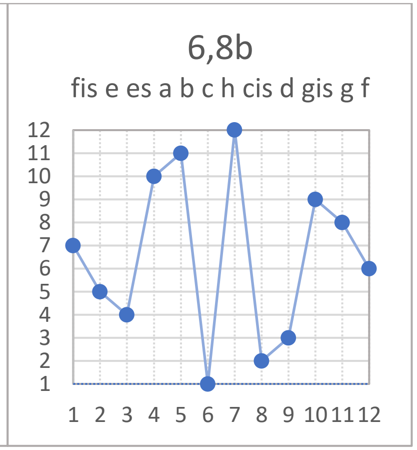






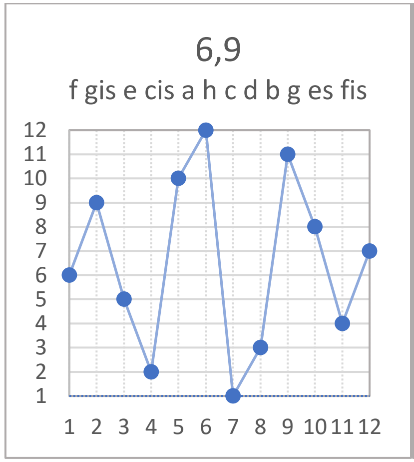


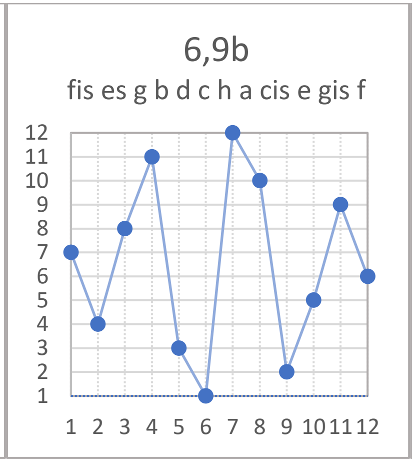


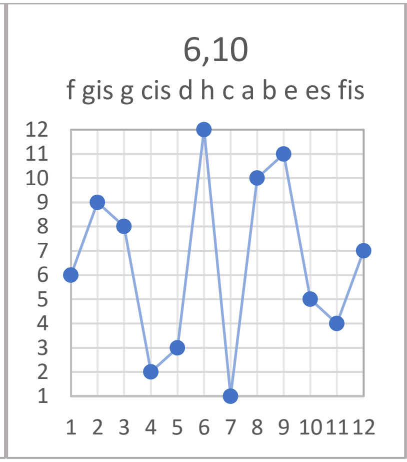


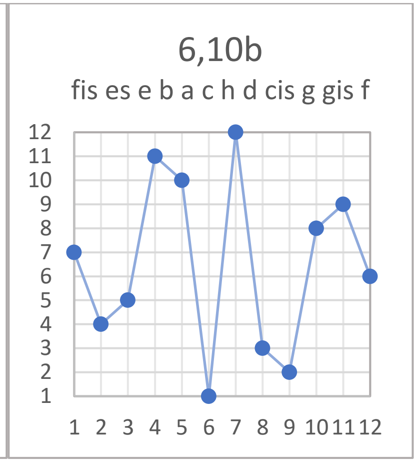
DIAGRAMMER 1
R = Rd

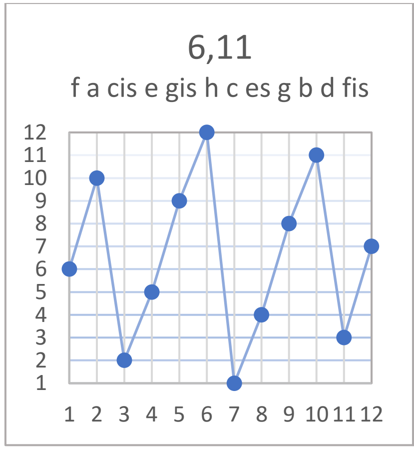
Udviklet fra 6

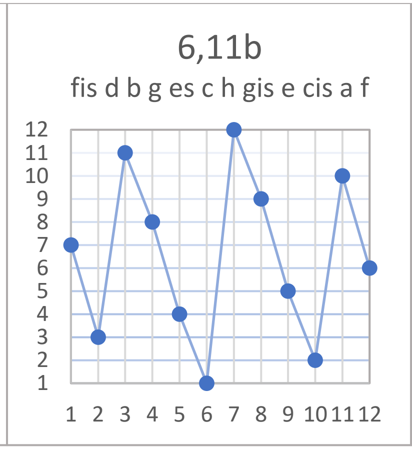


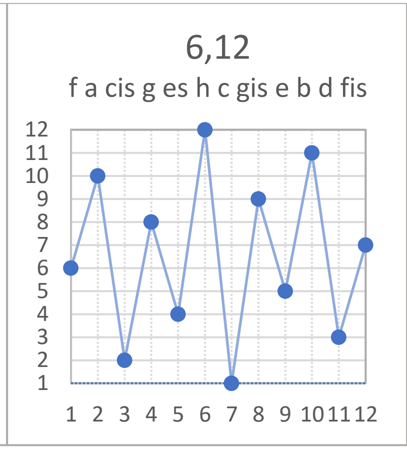


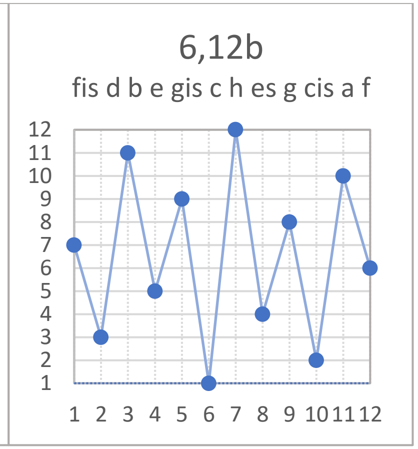








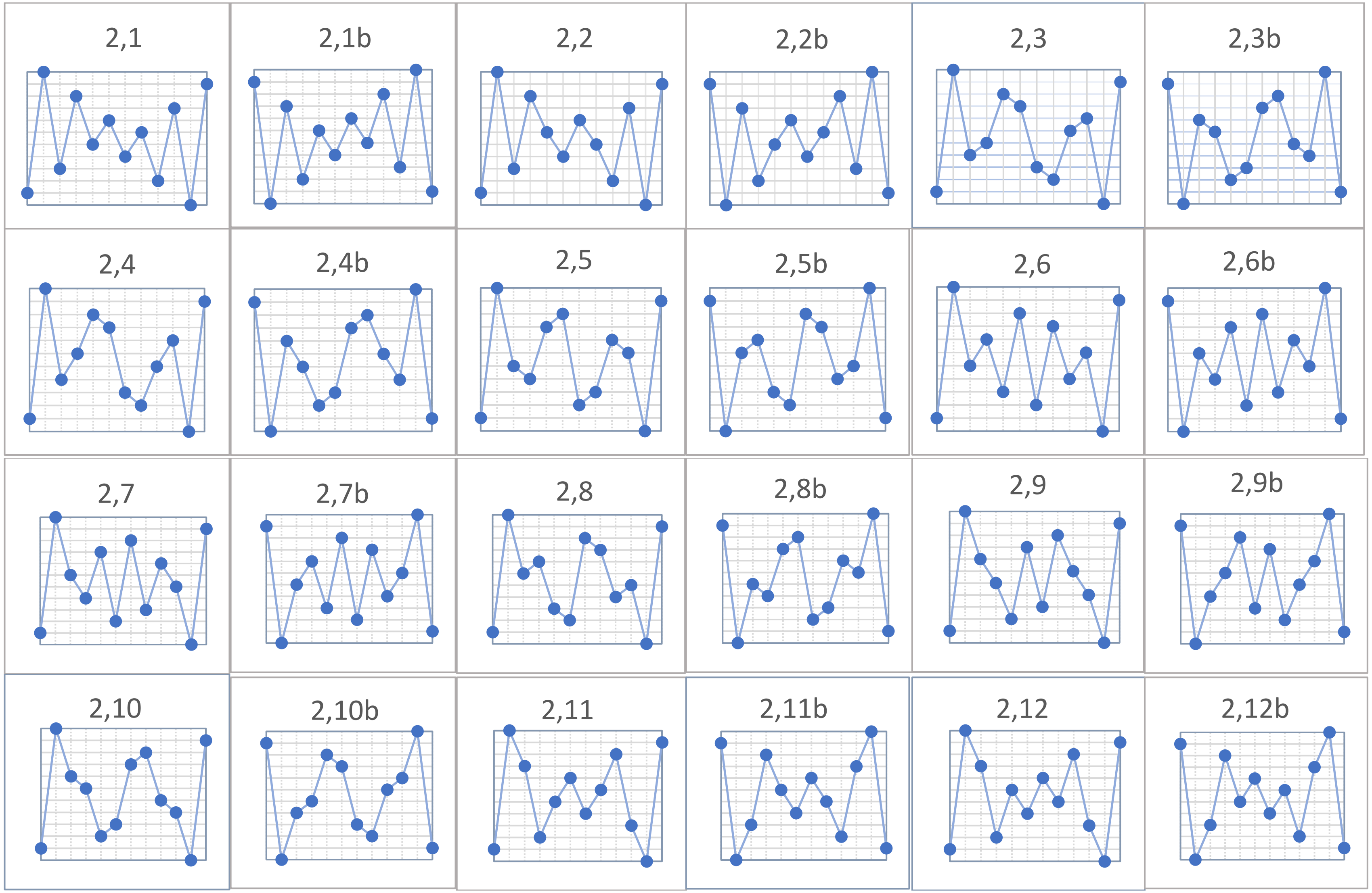




DIAGRAMOVERSIGT

R = Rd

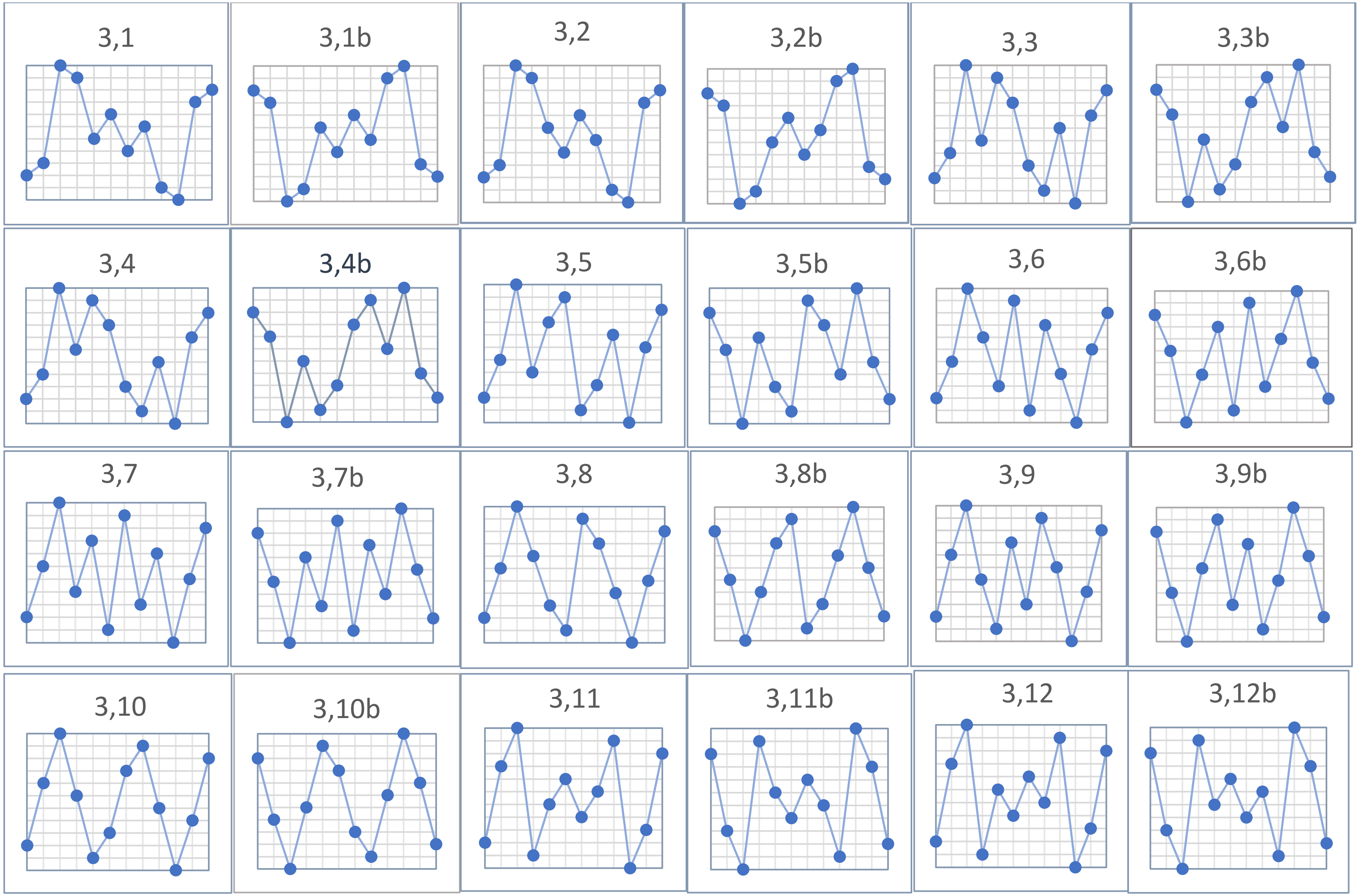
2



DIAGRAMOVERSIGT

R = Rd

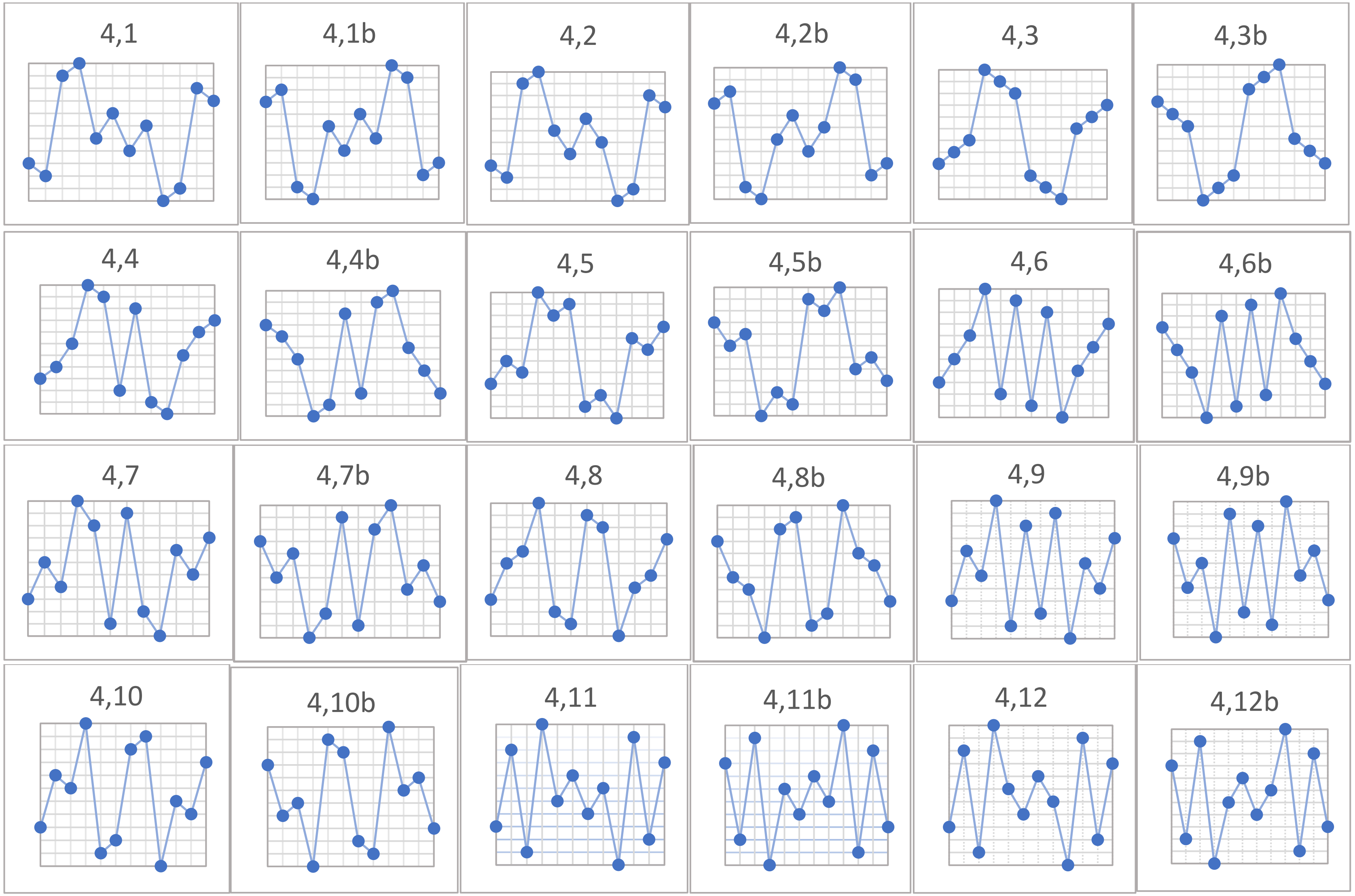
3



DIAGRAMOVERSIGT

R = Rd

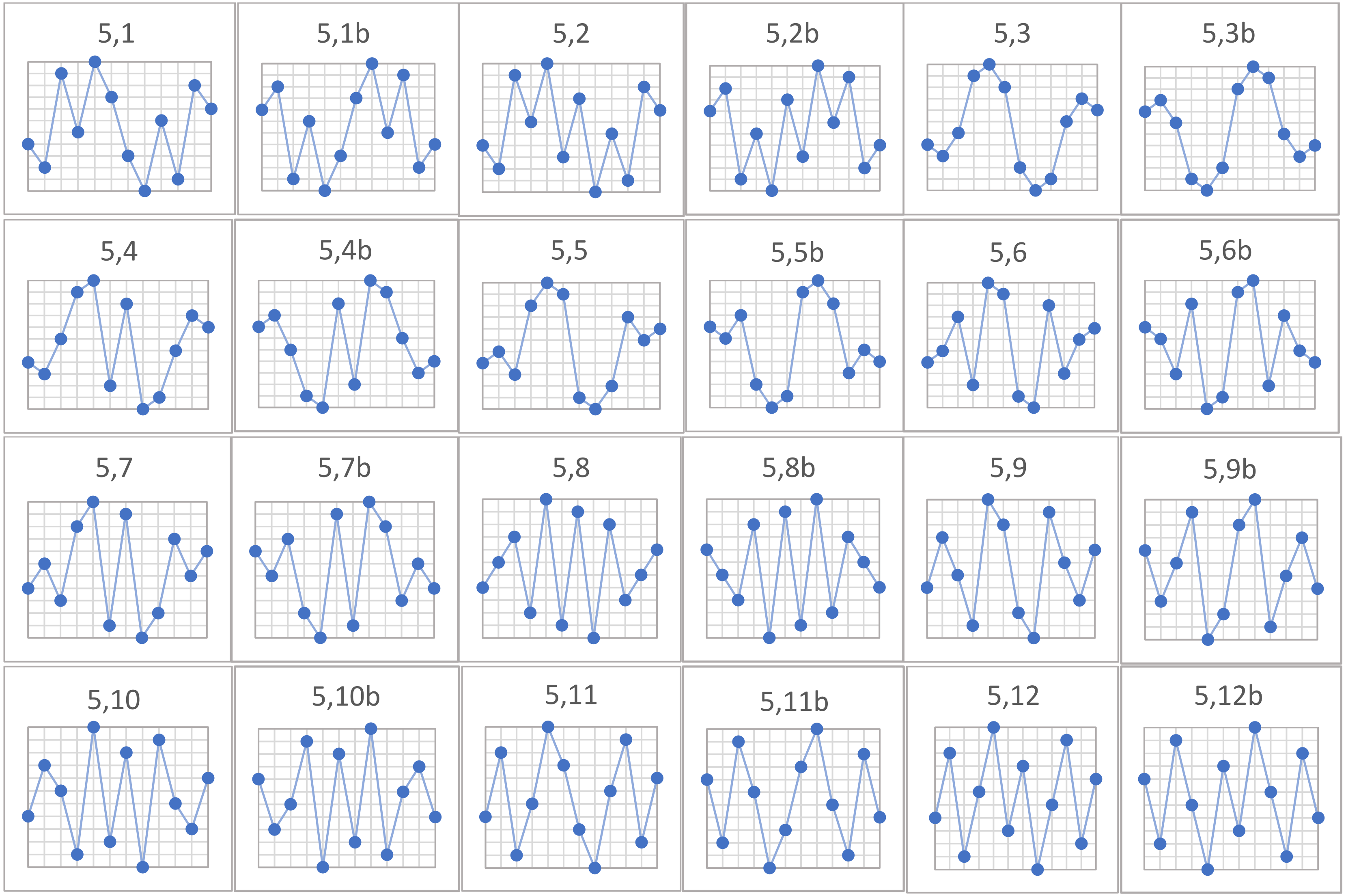
4



DIAGRAMOVERSIGT

R = Rd

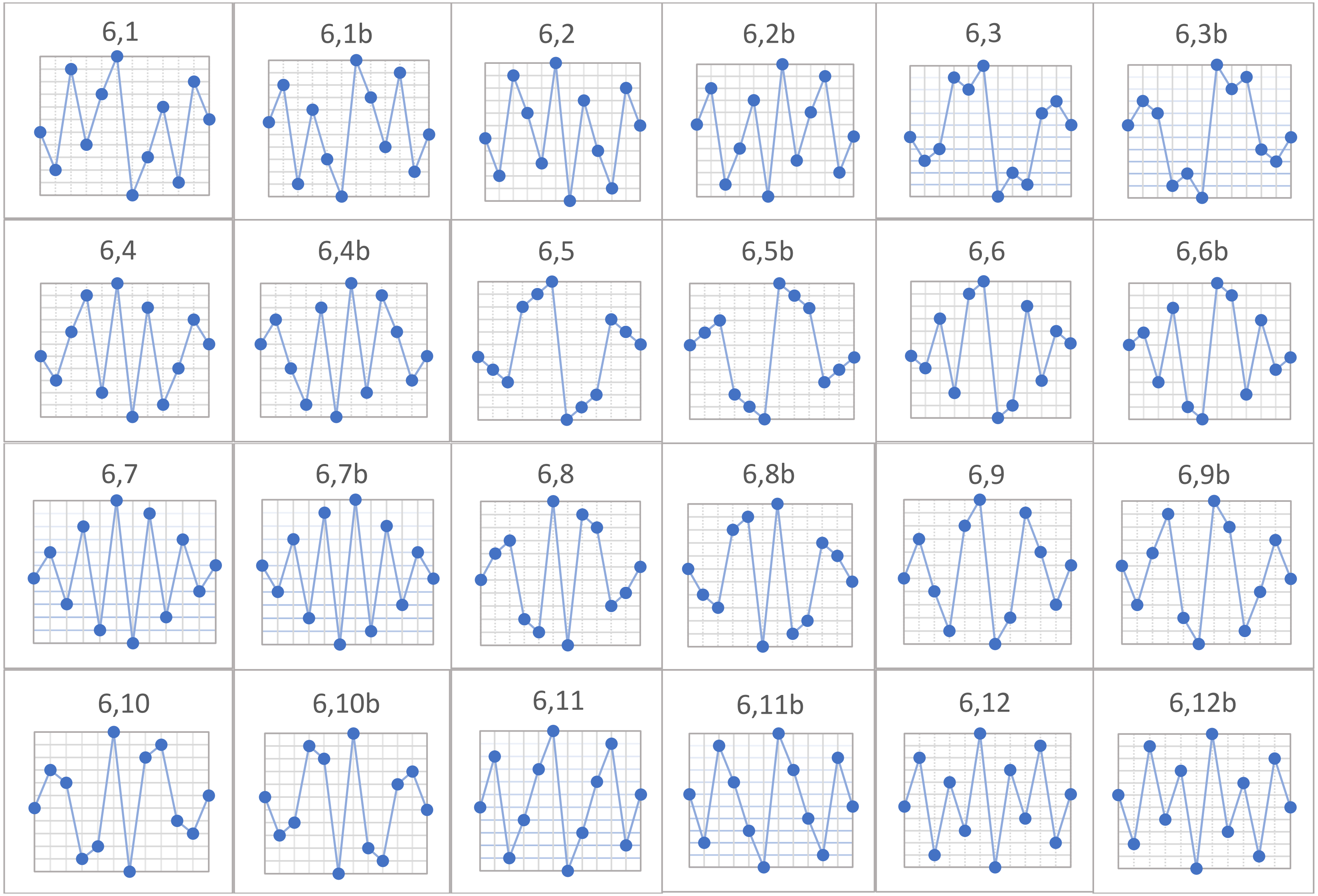
5



DIAGRAMOVERSIGT

R = Rd

6



TABEL 1 - R=Rd

Dg.nr.	Tolvtonerækken forlæns	Dg.nr.	Tolvtonerækken baglæns
2,1	2 12 4 10 6 8 5 7 3 9 1 11	2,1b	11 1 9 3 7 5 8 6 10 4 12 2
2,2	2 12 4 10 7 5 8 6 3 9 1 11	2,2b	11 1 9 3 6 8 5 7 10 4 12 2
2,3	2 12 5 6 10 9 4 3 7 8 1 11	2,3b	11 1 8 7 3 4 9 10 6 5 12 2
2,4	2 12 5 7 10 9 4 3 6 8 1 11	2,4b	11 1 8 6 3 4 9 10 7 5 12 2
2,5	2 12 6 5 9 10 3 4 8 7 1 11	2,5b	11 1 7 8 4 3 10 9 5 6 12 2
2,6	2 12 6 8 4 10 3 9 5 7 1 11	2,6b	11 1 7 5 9 3 10 4 8 6 12 2
2,7	2 12 7 5 9 3 10 4 8 6 1 11	2,7b	11 1 6 8 4 10 3 9 5 7 12 2
2,8	2 12 7 8 4 3 10 9 5 6 1 11	2,8b	11 1 6 5 9 10 3 4 8 7 12 2
2,9	2 12 8 6 3 9 4 10 7 5 1 11	2,9b	11 1 5 7 10 4 9 3 6 8 12 2
2,10	2 12 8 7 3 4 9 10 6 5 1 11	2,10b	11 1 5 6 10 9 4 3 7 8 12 2
2,11	2 12 9 3 6 8 5 7 10 4 1 11	2,11b	11 1 4 10 7 5 8 6 3 9 12 2
2,12	2 12 9 3 7 5 8 6 10 4 1 11	2,12b	11 1 4 10 6 8 5 7 3 9 12 2
3,1	3 4 12 11 6 8 5 7 2 1 9 10	3,1b	10 9 1 2 7 5 8 6 11 12 4 3
3,2	3 4 12 11 7 5 8 6 2 1 9 10	3,2b	10 9 1 2 6 8 5 7 11 12 4 3
3,3	3 5 12 6 11 9 4 2 7 1 8 10	3,3b	10 8 1 7 2 4 9 11 6 12 5 3
3,4	3 5 12 7 11 9 4 2 6 1 8 10	3,4b	10 8 1 6 2 4 9 11 7 12 5 3
3,5	3 6 12 5 9 11 2 4 8 1 7 10	3,5b	10 7 1 8 4 2 11 9 5 12 6 3
3,6	3 6 12 8 4 11 2 9 5 1 7 10	3,6b	10 7 1 5 9 2 11 4 8 12 6 3
3,7	3 7 12 5 9 2 11 4 8 1 6 10	3,7b	10 6 1 8 4 11 2 9 5 12 7 3
3,8	3 7 12 8 4 2 11 9 5 1 6 10	3,8b	10 6 1 5 9 11 2 4 8 12 7 5
3,9	3 8 12 6 2 9 4 11 7 1 5 10	3,9b	10 5 1 7 11 4 9 2 6 12 8 3
3,10	3 8 12 7 2 4 9 11 6 1 5 10	3,10b	10 5 1 6 11 9 4 2 7 12 8 3
3,11	3 9 12 2 6 8 5 7 11 1 4 10	3,11b	10 4 1 11 7 5 8 6 2 12 9 3
3,12	3 9 12 2 7 5 8 6 11 1 4 10	3,12b	10 4 1 11 6 8 5 7 2 12 9 3

TABEL 1 - R=Rd

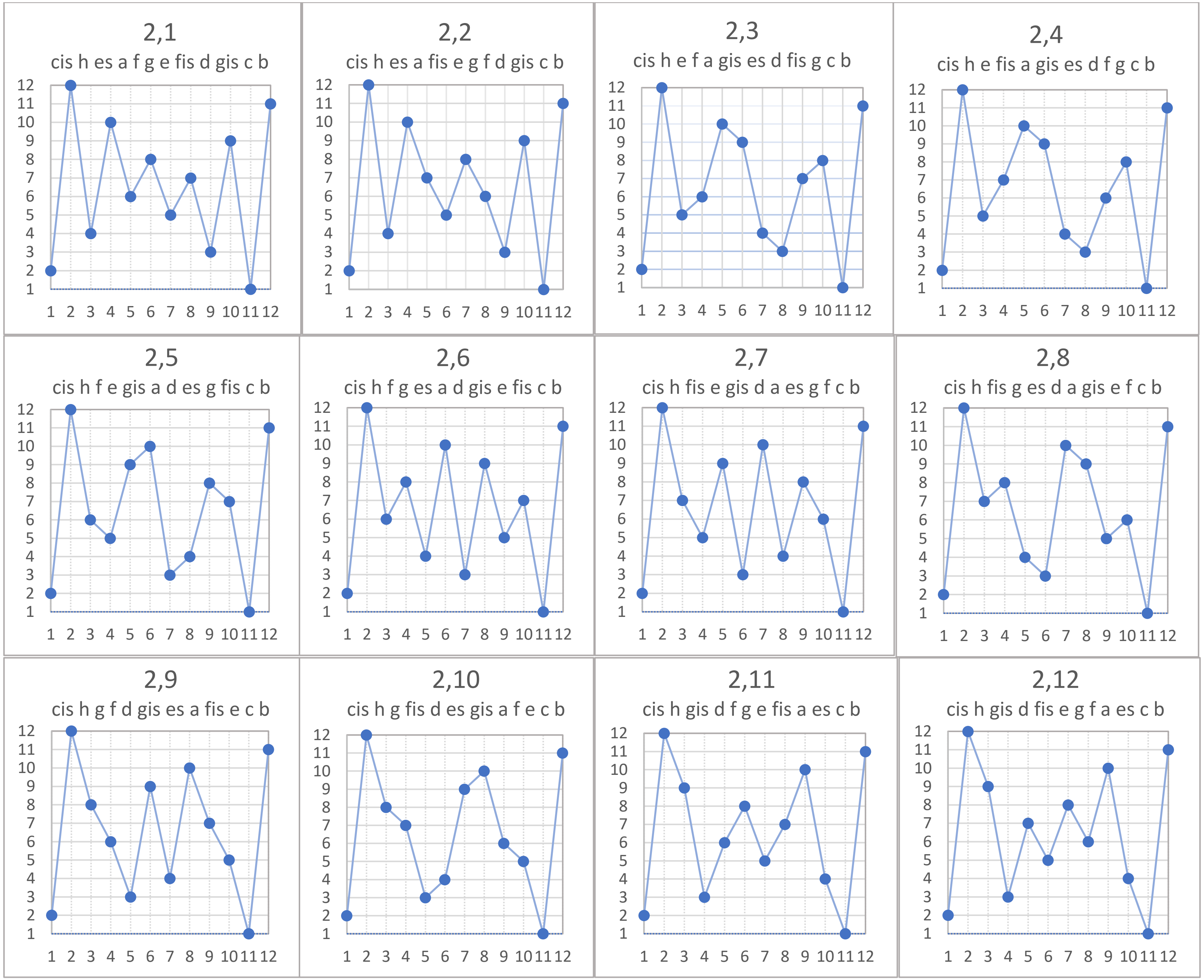
Dg.nr.	Tolvtonerækken forlæns	Dg.nr.	Tolvtonerækken baglæns
4,1	4 3 11 12 6 8 5 7 1 2 10 9	4,1b	9 10 2 1 7 5 8 6 12 11 3 4
4,2	4 3 11 12 7 5 8 6 1 2 10 9	4,2b	9 10 2 1 6 8 5 7 12 11 3 4
4,3	4 5 6 12 11 10 3 2 1 7 8 9	4,3b	9 8 7 1 2 3 10 11 12 6 5 4
4,4	4 5 7 12 11 3 10 2 1 6 8 9	4,4b	9 8 6 1 2 10 3 11 12 7 5 4
4,5	4 6 5 12 10 11 2 3 1 8 7 9	4,5b	9 7 8 1 3 2 11 10 12 5 6 4
4,6	4 6 8 12 3 11 2 10 1 5 7 9	4,6b	9 7 5 1 10 2 11 3 12 8 6 4
4,7	4 7 5 12 10 2 11 3 1 8 6 9	4,7b	9 6 8 1 3 11 2 10 12 5 7 4
4,8	4 7 8 12 3 2 11 10 1 5 6 9	4,8b	9 6 5 1 10 11 2 3 12 8 7 4
4,9	4 8 6 12 2 10 3 11 1 7 5 9	4,9b	9 5 7 1 11 3 10 2 12 6 8 4
4,10	4 8 7 12 2 3 10 11 1 6 5 9	4,10	9 5 6 1 11 10 3 2 12 7 8 4
4,11	4 10 2 12 6 8 5 7 1 11 3 9	4,11b	9 3 11 1 7 5 8 6 12 2 10 4
4,12	4 10 2 12 7 5 8 6 1 11 3 9	4,12b	9 3 11 1 6 8 5 7 12 2 10 4
5,1	5 3 11 6 12 9 4 1 7 2 10 8	5,1b	8 10 2 7 1 4 9 12 6 11 3 5
5,2	5 3 11 7 12 4 9 1 6 2 10 8	5,2b	8 10 2 6 1 9 4 12 7 11 3 5
5,3	5 4 6 11 12 10 3 1 2 7 9 8	5,3b	8 9 7 2 1 3 10 12 11 6 4 5
5,4	5 4 7 11 12 3 10 1 2 6 9 8	5,4b	8 9 6 2 1 10 3 12 11 7 4 5
5,5	5 6 4 10 12 11 2 1 3 9 7 8	5,5b	8 7 9 3 1 2 11 12 10 4 6 5
5,6	5 6 9 3 12 11 2 1 10 4 7 8	5,6b	8 7 4 10 1 2 11 12 3 9 6 5
5,7	5 7 4 10 12 2 11 1 3 9 6 8	5,7b	8 6 9 3 1 11 2 12 10 4 7 5
5,8	5 7 9 3 12 2 11 1 10 4 6 8	5,8b	8 6 4 10 1 11 2 12 3 9 7 5
5,9	5 9 6 2 12 10 3 1 11 7 4 8	5,9b	8 4 7 11 1 3 10 12 2 6 9 5
5,10	5 9 7 2 12 3 10 1 11 6 4 8	5,10b	8 4 6 11 1 10 3 12 2 7 9 5
5,11	5 10 2 6 12 9 4 1 7 11 3 8	5,11b	8 3 11 7 1 4 9 12 6 2 10 5
5,12	5 10 2 7 12 4 9 1 6 11 3 8	5,12b	8 3 11 6 1 9 4 12 7 2 10 5

TABEL 1 - R=Rd

Dg.nr.	Tolvtonerække forlæns	Dg.nr.	Tolvtonerækken baglæns
6,1	6 3 11 5 9 12 1 4 8 2 10 7	6,1b	7 10 2 8 4 1 12 9 5 11 3 6
6,2	6 3 11 8 4 12 1 9 5 2 10 7	6,2b	7 10 2 5 9 1 12 4 8 11 3 6
6,3	6 4 5 11 10 12 1 3 2 8 9 7	6,3b	7 9 8 2 3 1 12 10 11 5 4 6
6,4	6 4 8 11 3 12 1 10 2 5 9 7	6,4b	7 9 5 2 10 1 12 3 11 8 4 6
6,5	6 5 4 10 11 12 1 2 3 9 8 7	6,5b	7 8 9 3 2 1 12 11 10 4 5 6
6,6	6 5 9 3 11 12 1 2 10 4 8 7	6,6b	7 8 4 10 2 1 12 11 3 9 5 6
6,7	6 8 4 10 2 12 1 11 3 9 5 7	6,7b	7 5 9 3 11 1 12 2 10 4 8 6
6,8	6 8 9 3 2 12 1 11 10 4 5 7	6,8b	7 5 4 10 11 1 12 2 3 9 8 6
6,9	6 9 5 2 10 12 1 3 11 8 4 7	6,9b	7 4 8 11 3 1 12 10 2 5 9 6
6.10	6 9 8 2 3 12 1 10 11 5 4 7	6,10b	7 4 5 11 10 1 12 3 2 8 9 6
6,11	6 10 2 5 9 12 1 4 8 11 3 7	6,11b	7 3 11 8 4 1 12 9 5 2 10 6
6,12	6 10 2 8 4 12 1 9 5 11 3 7	6,12b	7 3 11 5 9 1 12 4 8 2 10 6

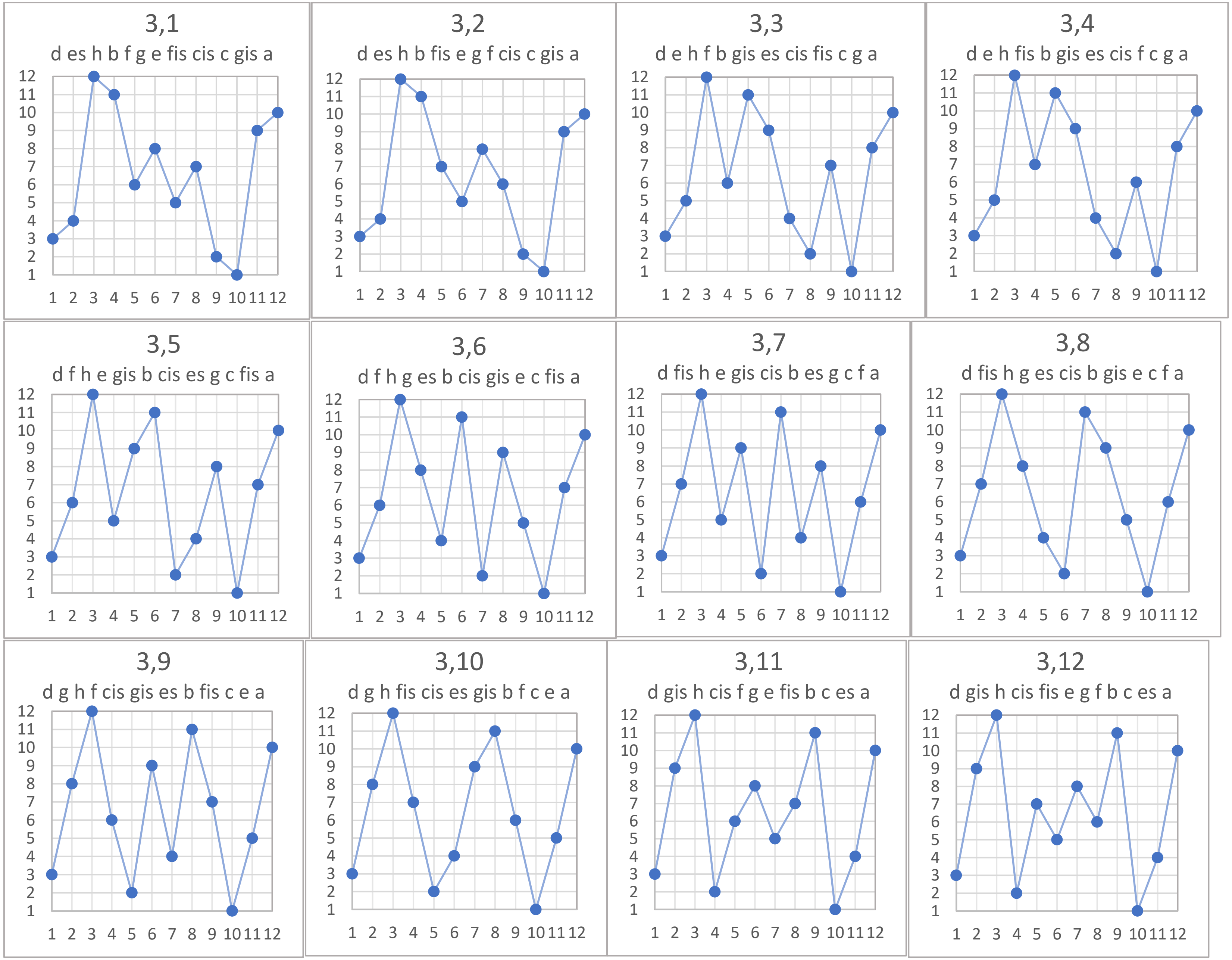
Fra 2

DIAGRAMMER 2 - R=Rd



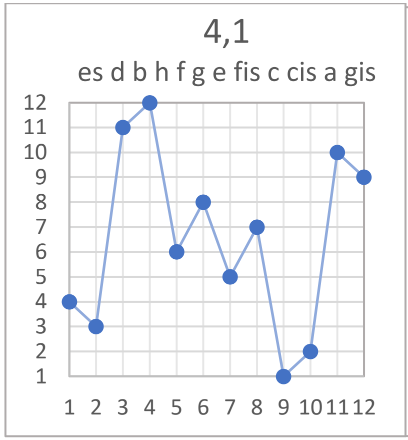
Fra 3

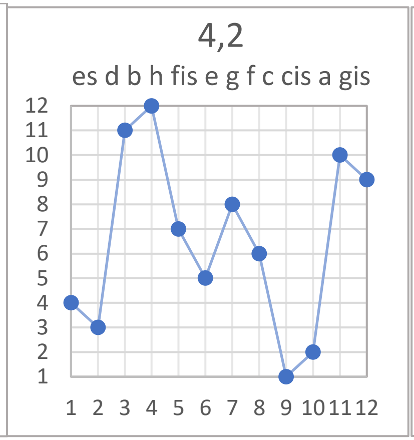
DIAGRAMMER 2 - R=Rd

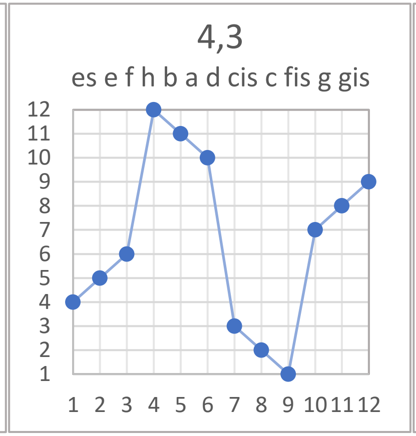


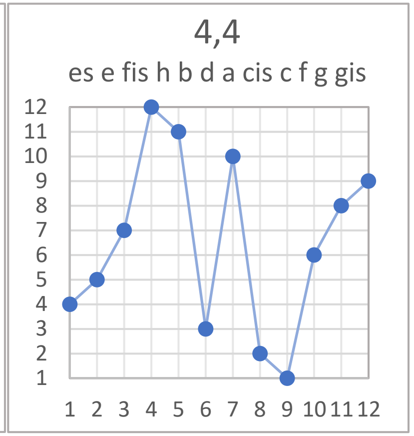
Fra 4

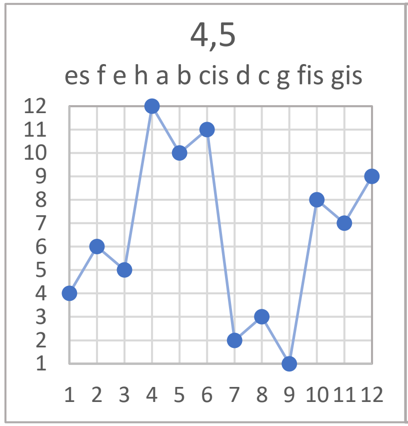
DIAGRAMMER 2 - R=Rd

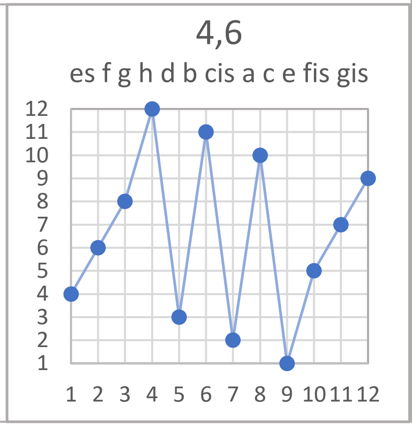


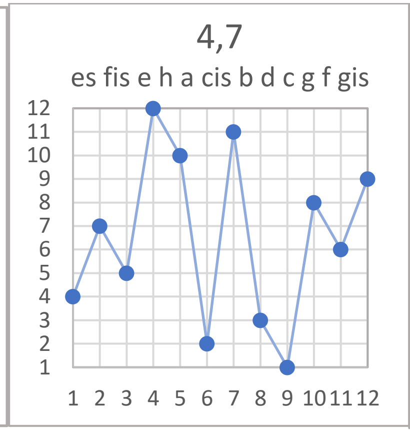


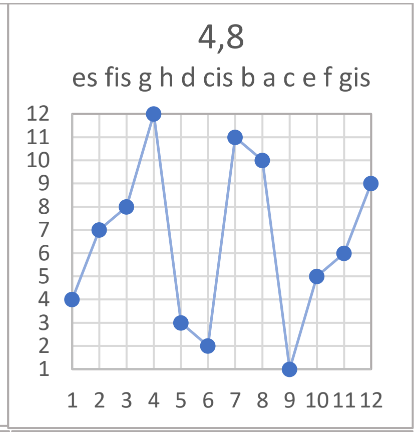


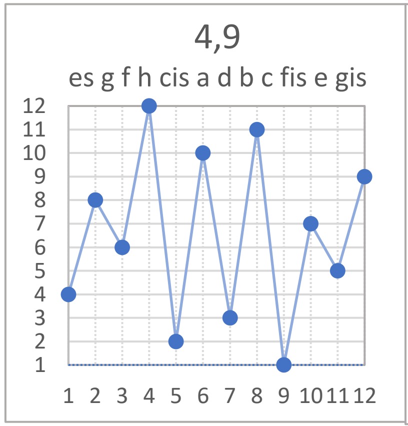


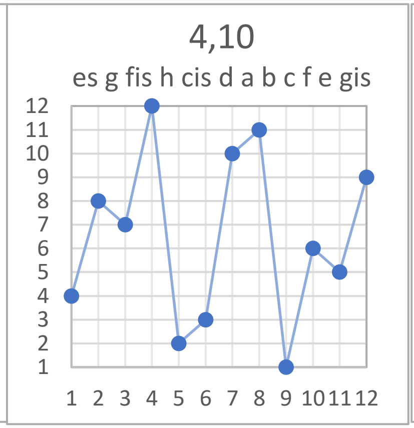


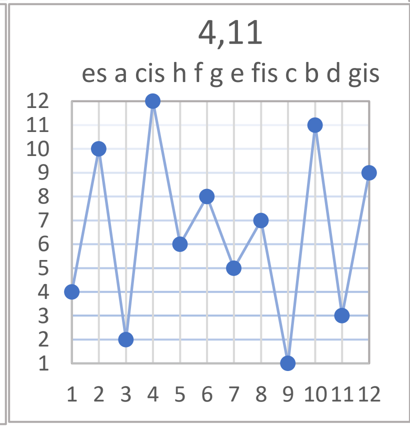


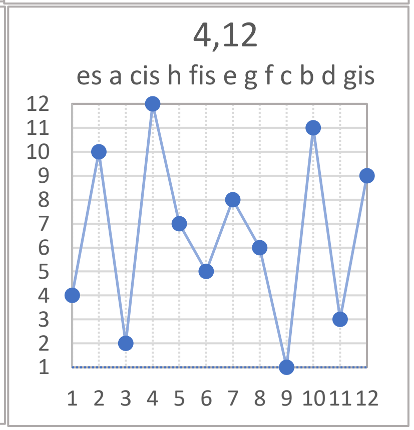










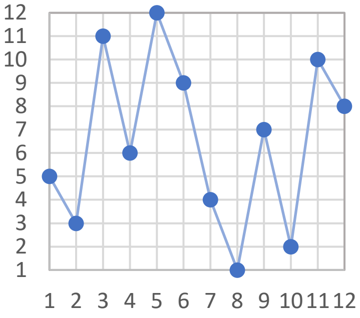


Fra 5

DIAGRAMMER 2 - R=Rd

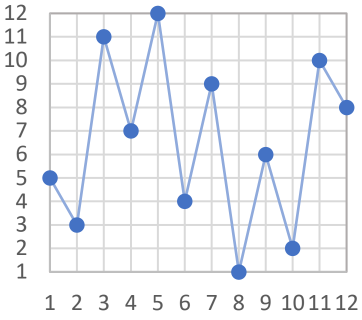
5,1

e d b f h gis es c fis cis a g



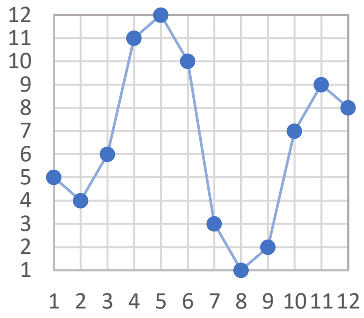
5,2

e d b fis h es gis c f cis a g



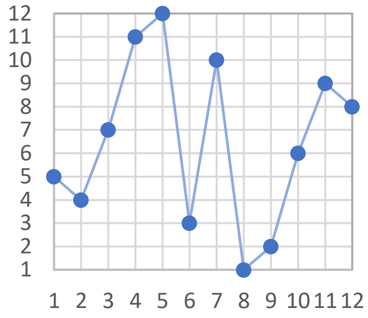
5,3

e es f b h a d c cis fis gis g



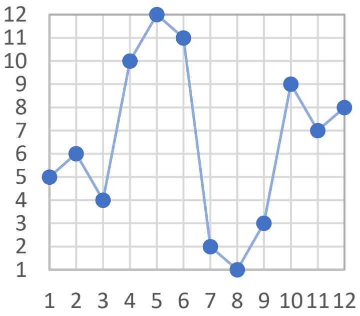
5,4

e es fis b h d a c cis f gis g



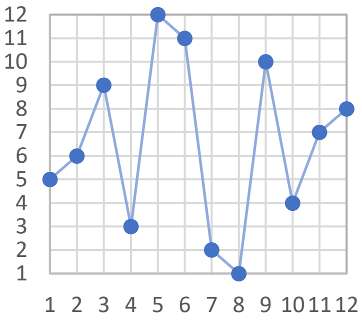
5,5

e f es a h b cis c d gis fis g



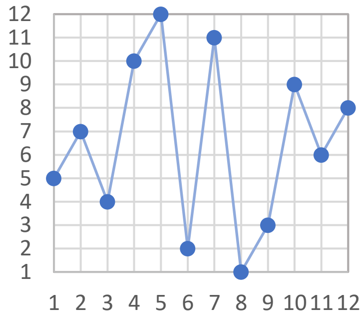
5,6

e f gis d h b cis c a es fis g



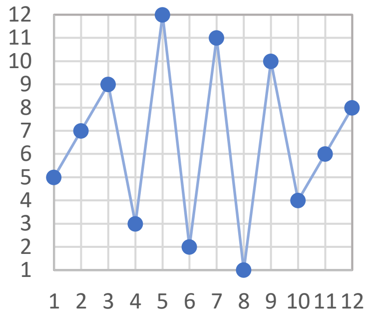
5,7

e fis es a h cis b c d gis f g



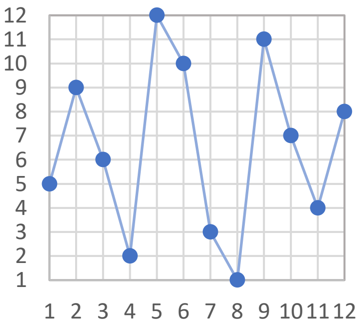
5,8

e fis gis d h cis b c a es f g



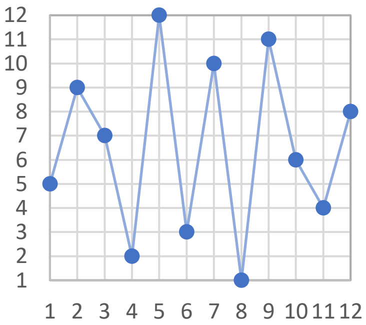
5,9

e gis f cis h a d c b fis es g



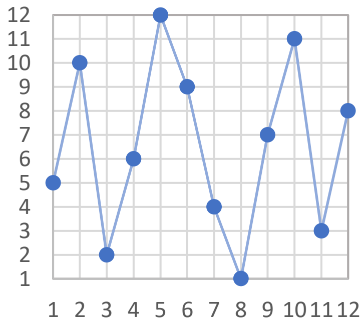
5,10

e gis fis cis h d a c b f es g



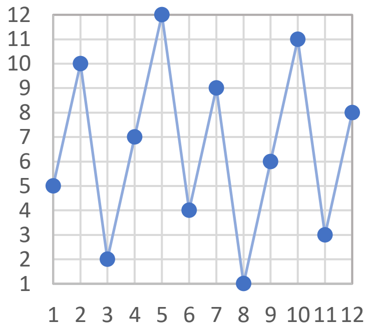
5,11

e a cis f h gis es c fis b d g



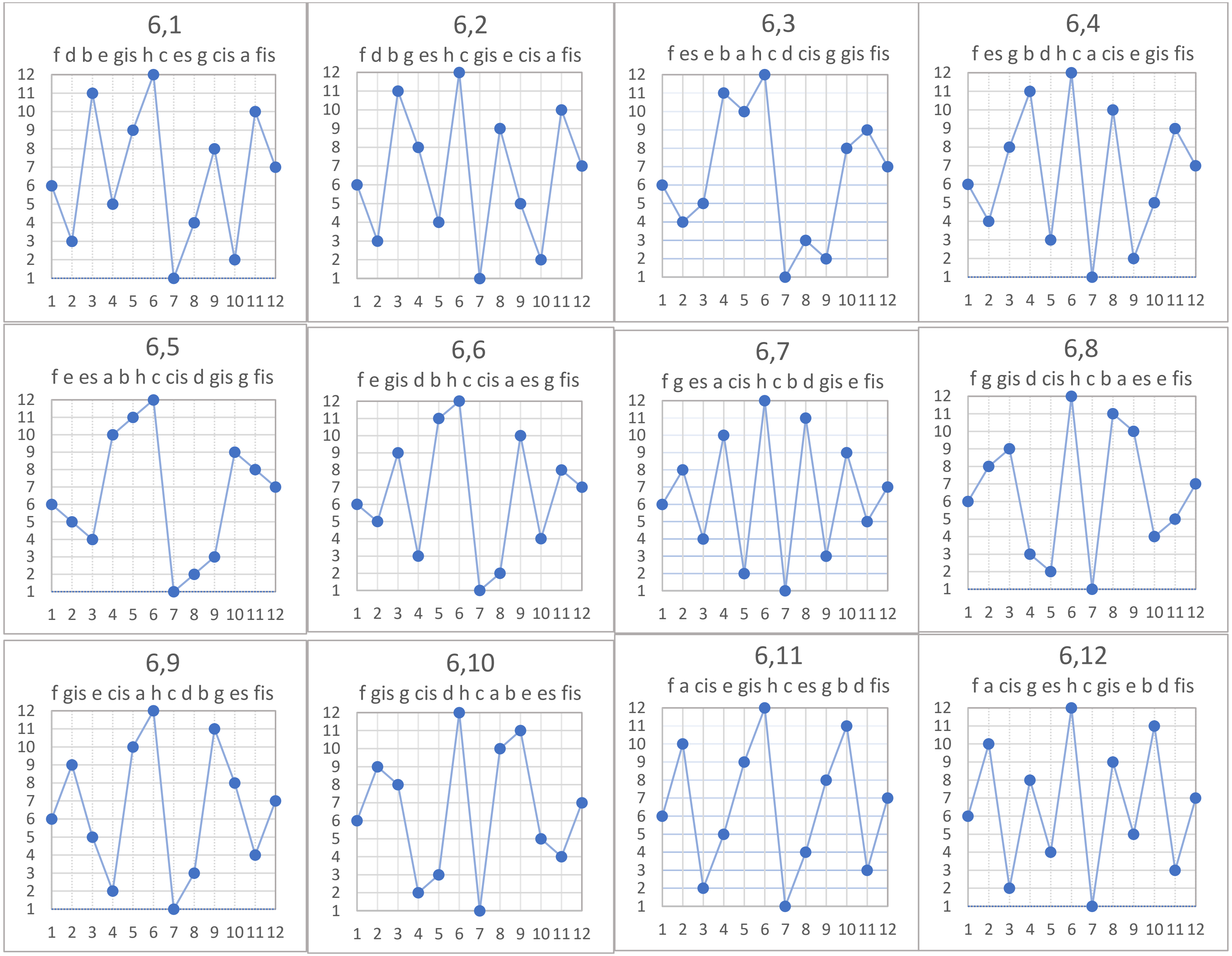
5,12

e a cis fis h es gis c f b d g



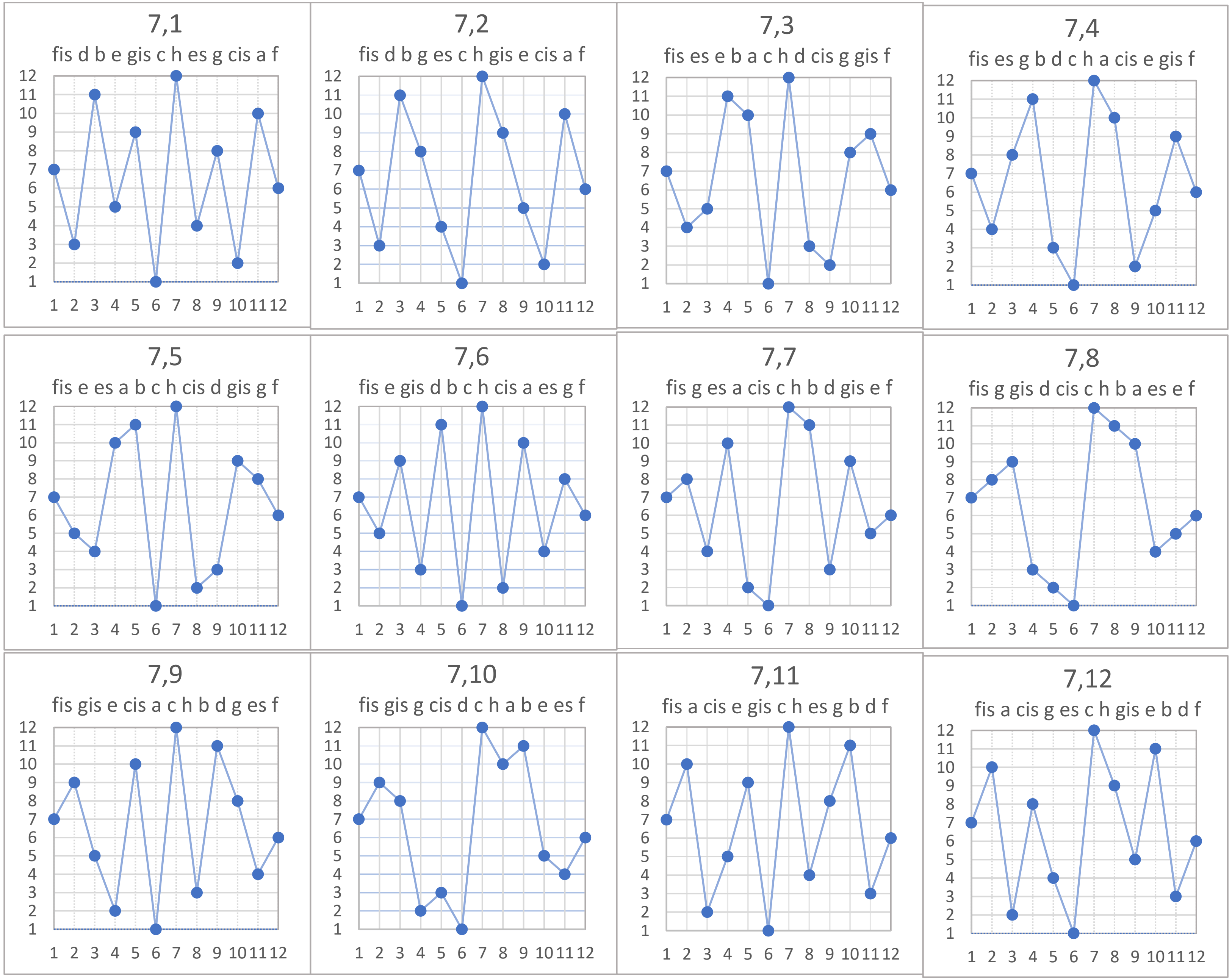
Fra 6

DIAGRAMMER 2 - R=Rd



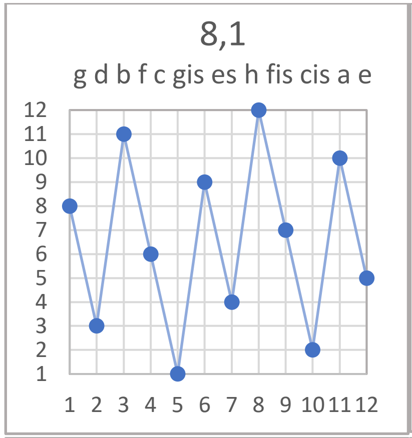
Fra 7

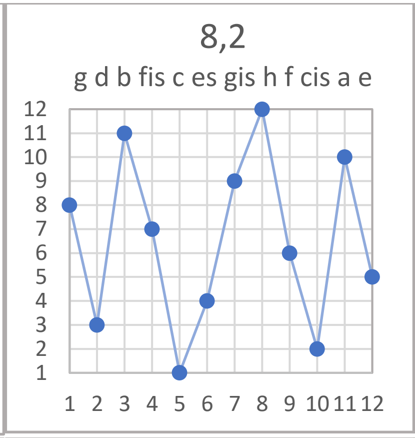
DIAGRAMMER 2 - R=Rd

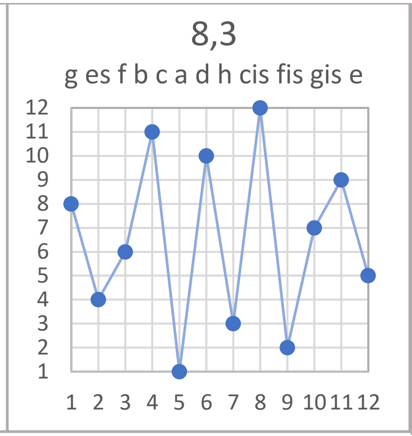


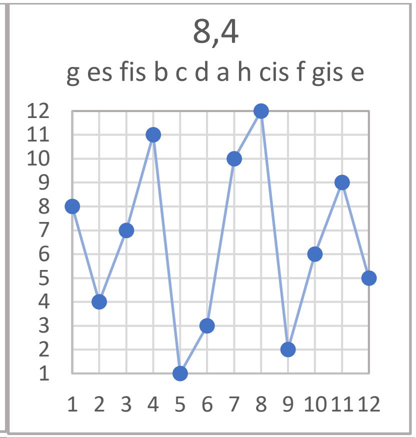
Fra 8

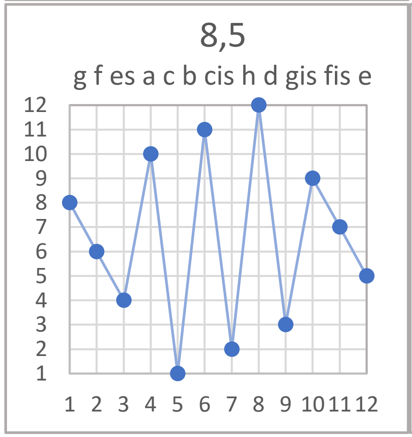
DIAGRAMMER 2 - R=Rd

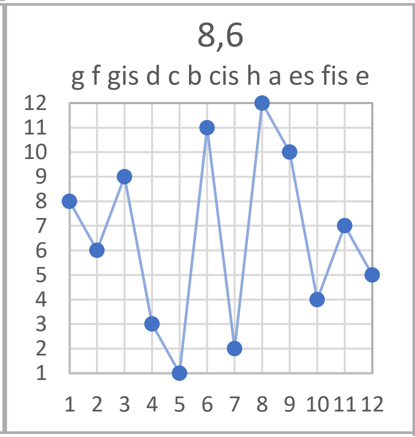


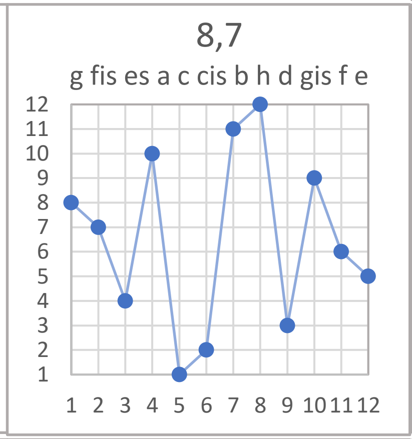


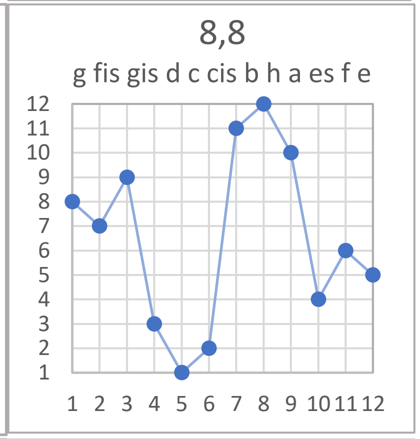


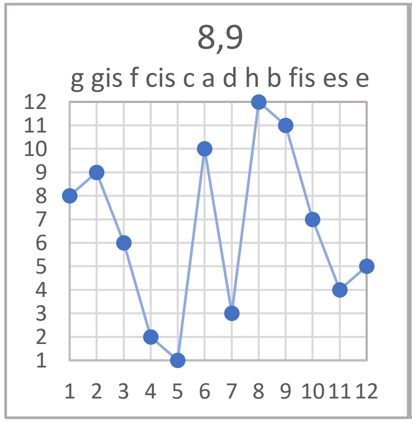


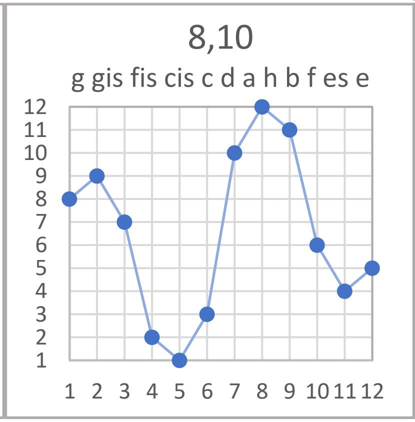


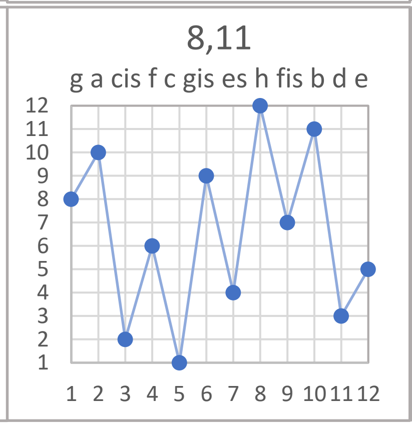


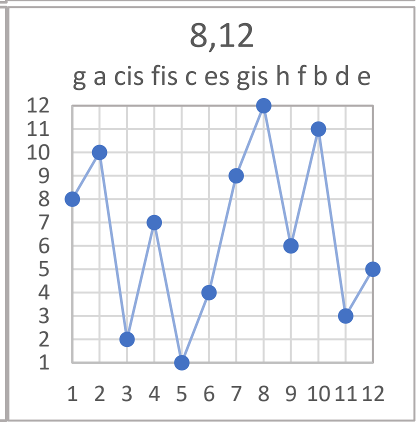






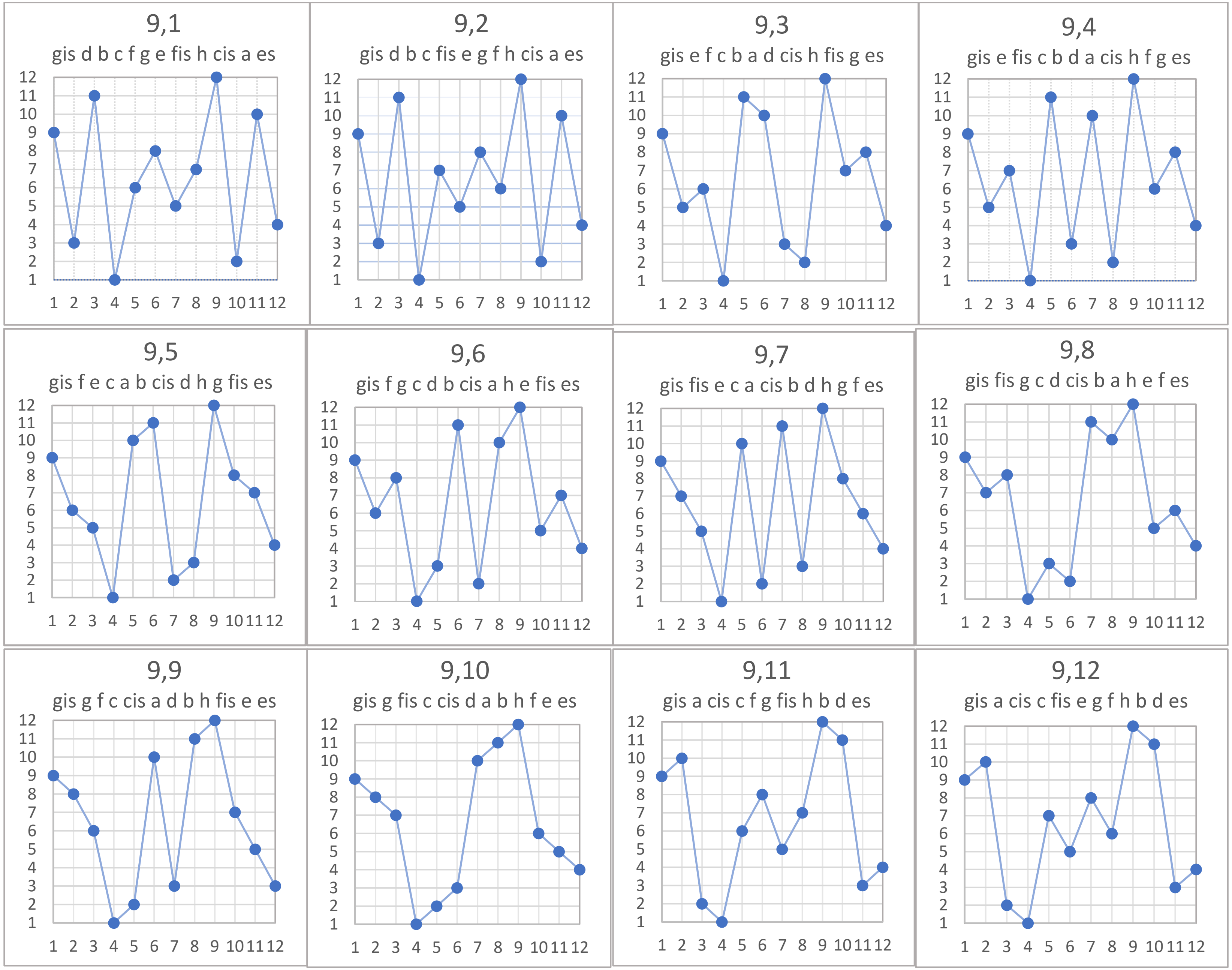






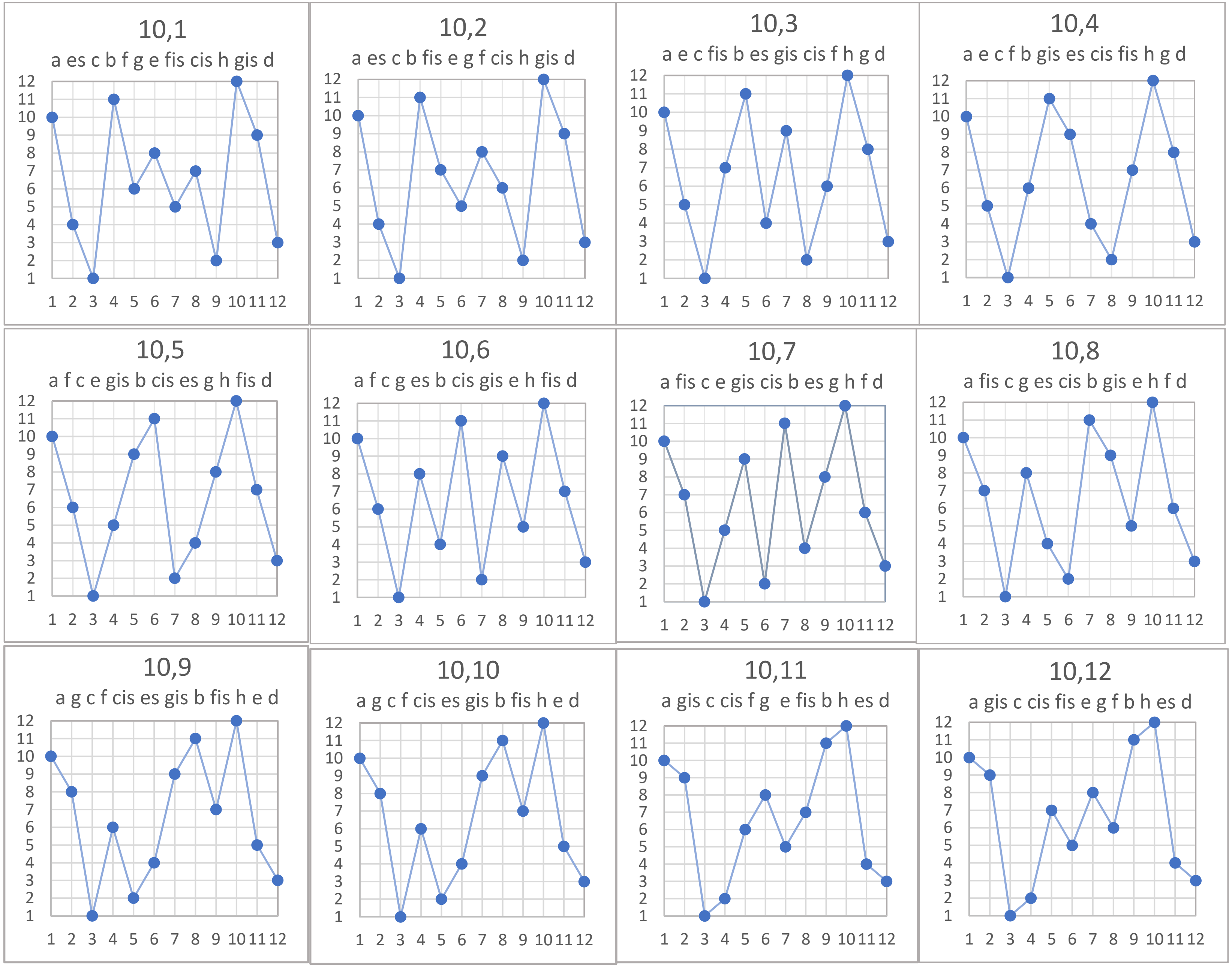
Fra 9

DIAGRAMMER 2 - R=Rd



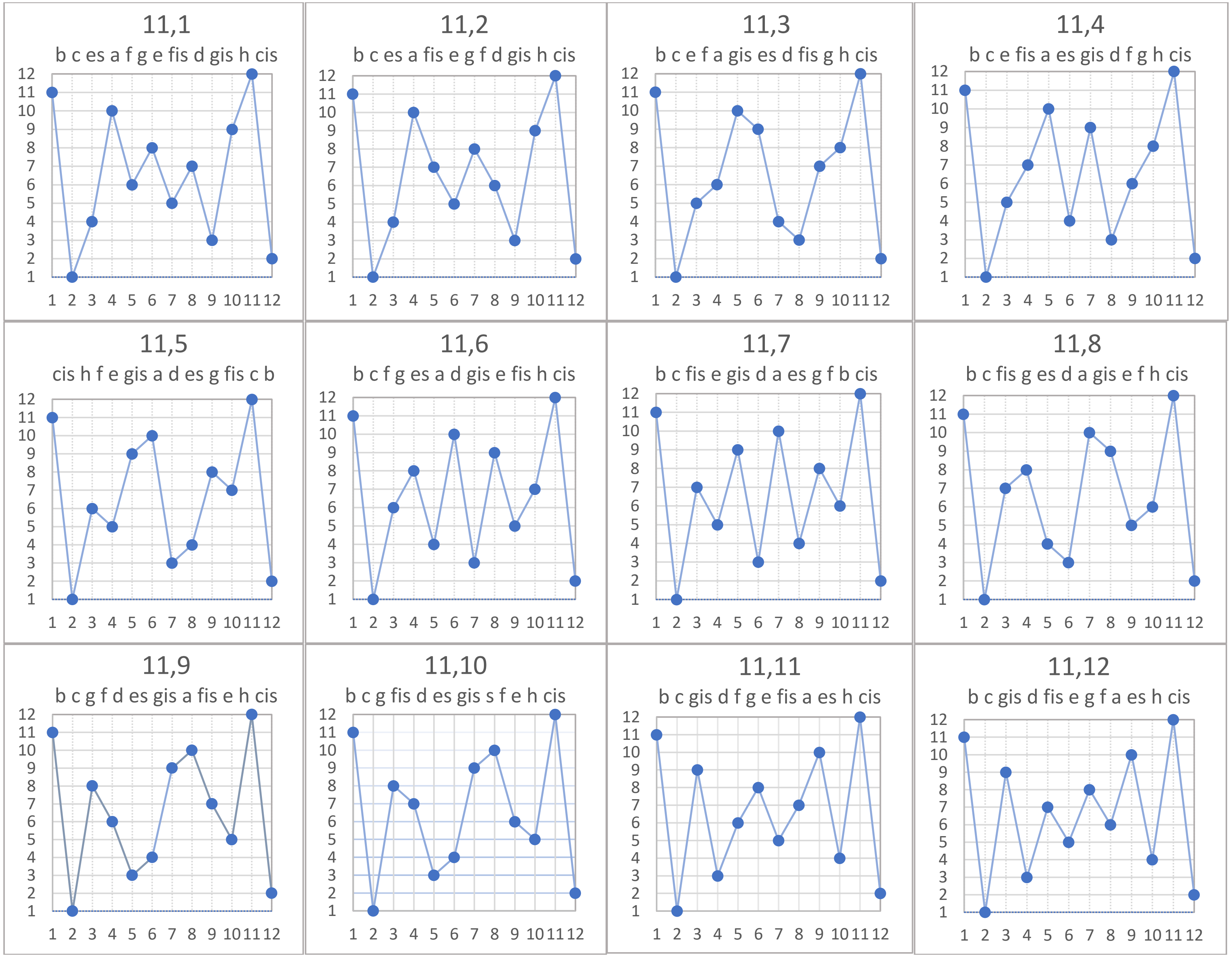
Fra 10

DIAGRAMMER 2 - R=Rd



Fra 11

DIAGRAMMER 2 - R=Rd



Tabel 2 - R=Rd

Dg.nr.	Tolvtonerække
2,1	2 12 4 10 6 8 5 7 3 9 1 11
2,2	2 12 4 10 7 5 8 6 3 9 1 11
2,3	2 12 5 6 10 9 4 3 7 8 1 11
2,4	2 12 5 7 10 9 4 3 6 8 1 11
2,5	2 12 6 5 9 10 3 4 8 7 1 11
2,6	2 12 6 8 4 10 3 9 5 7 1 11
2,7	2 12 7 5 9 3 10 4 8 6 1 11
2,8	2 12 7 8 4 3 10 9 5 6 1 11
2,9	2 12 8 6 3 9 4 10 7 5 1 11
2,10	2 12 8 7 3 4 9 10 6 5 1 11
2,11	2 12 9 3 6 8 5 7 10 4 1 11
2,12	2 12 9 3 7 5 8 6 10 4 1 11
3,1	3 4 12 11 6 8 5 7 2 1 9 10
3,2	3 4 12 11 7 5 8 6 2 1 9 10
3,3	3 5 12 6 11 9 4 2 7 1 8 10
3,4	3 5 12 7 11 9 4 2 6 1 8 10
3,5	3 6 12 5 9 11 2 4 8 1 7 10
3,6	3 6 12 8 4 11 2 9 5 1 7 10
3,7	3 7 12 5 9 2 11 4 8 1 6 10
3,8	3 7 12 8 4 2 11 9 5 1 6 10
3,9	3 8 12 6 2 9 4 11 7 1 5 10
3,10	3 8 12 7 2 4 9 11 6 1 5 10
3,11	3 9 12 2 6 8 5 7 11 1 4 10
3,12	3 9 12 2 7 5 8 6 11 1 4 10

Dg.nr.	Tolvtonerække
4,1	4 3 11 12 6 8 5 7 1 2 10 9
4,2	4 3 11 12 7 5 8 6 1 2 10 9
4,3	4 5 6 12 11 10 3 2 1 7 8 9
4,4	4 5 7 12 11 3 10 2 1 6 8 9
4,5	4 6 5 12 10 11 2 3 1 8 7 9
4,6	4 6 8 12 3 11 2 10 1 5 7 9
4,7	4 7 5 12 10 2 11 3 1 8 6 9
4,8	4 7 8 12 3 2 11 10 1 5 6 9
4,9	4 8 6 12 2 10 3 11 1 7 5 9
4,10	4 8 7 12 2 3 10 11 1 6 5 9
4,11	4 10 2 12 6 8 5 7 1 11 3 9
4,12	4 10 2 12 7 5 8 6 1 11 3 9
5,1	5 3 11 6 12 9 4 1 7 2 10 8
5,2	5 3 11 7 12 4 9 1 6 2 10 8
5,3	5 4 6 11 12 10 3 1 2 7 9 8
5,4	5 4 7 11 12 3 10 1 2 6 9 8
5,5	5 6 4 10 12 11 2 1 3 9 7 8
5,6	5 6 9 3 12 11 2 1 10 4 7 8
5,7	5 7 4 10 12 2 11 1 3 9 6 8
5,8	5 7 9 3 12 2 11 1 10 4 6 8
5,9	5 9 6 2 12 10 3 1 11 7 4 8
5,10	5 9 7 2 12 3 10 1 11 6 4 8
5,11	5 10 2 6 12 9 4 1 7 11 3 8
5,12	5 10 2 7 12 4 9 1 6 11 3 8

Tabel 2 - R=Rd

Dg.nr.	Tolvtonerække	
6,1	6 3 11 5 9 12 1 4 8 2 10 7	
6,2	6 3 11 8 4 12 1 9 5 2 10 7	
6,3	6 4 5 11 10 12 1 3 2 8 9 7	
6,4	6 4 8 11 3 12 1 10 2 5 9 7	
6,5	6 5 4 10 11 12 1 2 3 9 8 7	
6,6	6 5 9 3 11 12 1 2 10 4 8 7	
6,7	6 8 4 10 2 12 1 11 3 9 5 7	
6,8	6 8 9 3 2 12 1 11 10 4 5 7	
6,9	6 9 5 2 10 12 1 3 11 8 4 7	
6.10	6 9 8 2 3 12 1 10 11 5 4 7	
6,11	6 10 2 5 9 12 1 4 8 11 3 7	
6,12	6 10 2 8 4 12 1 9 5 11 3 7	
7,1	7 3 11 5 9 1 12 4 8 2 10 6	6,12b
7,2	7 3 11 8 4 1 12 9 5 2 10 6	6,11b
7,3	7 4 5 11 10 1 12 3 2 8 9 6	6,10b
7,4	7 4 8 11 3 1 12 10 2 5 9 8	6,9b
7,5	7 5 4 10 11 1 12 2 3 9 8 6	6,8b
7,6	7 5 9 3 11 1 12 2 10 4 8 6	6,7b
7,7	7 8 4 10 2 1 12 11 3 9 5 6	6,6b
7,8	7 8 9 3 2 1 12 11 10 4 5 6	6,5b
7,9	7 9 5 2 10 1 12 3 11 8 4 6	6,4b
7,10	7 9 8 2 3 1 12 10 11 5 4 6	6,3b
7,11	7 10 2 5 9 1 12 4 8 11 3 6	6,2b
7,12	7 10 2 8 4 1 12 9 5 11 3 6	6,1b

Dg.nr.	Tolvtonerække	
8,1	8 3 11 6 1 9 4 12 7 2 10 5	5,12b
8,2	8 3 11 7 1 4 9 12 6 2 10 5	5,11b
8,3	8 4 6 11 1 10 3 12 2 7 9 5	5,10b
8,4	8 4 7 11 1 3 10 12 2 6 9 5	5,9b
8,5	8 6 4 10 1 11 2 12 3 9 7 5	5,8b
8,6	8 6 9 3 1 11 2 12 10 4 7 5	5,7b
8,7	8 7 4 10 1 2 11 12 3 9 6 5	5,6b
8,8	8 7 9 3 1 2 11 12 10 4 6 5	5,5b
8,9	8 9 6 2 1 10 3 12 11 7 4 5.	5,4b
8,10	8 9 7 2 1 3 10 12 11 6 4 5	5,3b
8,11	8 10 2 6 1 9 4 12 7 11 3 5	5,2b
8,12	8 10 2 7 1 4 9 12 6 11 3 5	5,1b
9,1	9 3 11 1 6 8 5 7 12 2 10 4	4,12b
9,2	9 3 11 1 7 5 8 6 12 2 10 4	4,11b
9,3	9 5 6 1 11 10 3 2 12 7 8 4	4,10b
9,4	9 5 7 1 11 3 10 2 12 6 8 4	4,9b
9,5	9 6 5 1 10 11 2 3 12 8 7 4	4,8b
9,6	9 6 8 1 3 11 2 10 12 5 7 4	4,7b
9,7	9 7 5 1 10 2 11 3 12 8 6 4	4,6b
9,8	9 7 8 1 3 2 11 10 12 5 6 4	4,5b
9,9	9 8 6 1 2 10 3 11 12 7 5 4	4,4b
9,10	9 8 7 1 2 3 10 11 12 6 5 4	4,3b
9,11	9 10 2 1 6 8 5 7 12 11 3 4	4,2b
9,12	9 10 2 1 7 5 8 6 12 11 3 4	4,1b

Tabel 2 - R=Rd

Dg.nr.	Tolvtonerække	
10,1	10 4 1 11 6 8 5 7 2 12 9 3	3,12b
10,2	10 4 1 11 7 5 8 6 2 12 9 3	3,11b
10,3	10 5 1 6 11 9 4 2 7 12 8 3	3,10b
10,4	10 5 1 7 11 4 9 2 6 12 8 3	3,9b
10,5	10 6 1 5 9 11 2 4 8 12 7 3	3,8b
10,6	10 6 1 8 4 11 2 9 5 12 7 3	3,7b
10,7	10 7 1 5 9 2 11 4 8 12 6 3	3,6b
10,8	10 7 1 8 4 2 11 9 5 12 6 3	3,5b
10,9	10 8 1 6 2 4 9 11 7 12 5 3	3,4b
10,10	10 8 1 7 2 4 9 11 6 12 5 3	3,3b
10,11	10 9 1 2 6 8 5 7 11 12 4 3	3,2b
10,12	10 9 1 2 7 5 8 6 11 12 4 3	3,1b

Dg.nr.	Tolvtonerække	
11,1	11 1 4 10 6 8 5 7 3 9 12 2	2,12b
11,2	11 1 4 10 7 5 8 6 3 9 12 2	2,11b
11,3	11 1 5 6 10 9 4 3 7 8 12 2	2,10b
11,4	11 1 5 7 10 4 9 3 6 8 12 2	2,9b
11,5	11 1 6 5 9 10 3 4 8 7 12 2	2,8b
11,6	11 1 6 8 4 10 3 9 5 7 12 2	2,7b
11,7	11 1 7 5 9 3 10 4 8 6 12 2	2,6b
11,8	11 1 7 8 4 3 10 9 5 6 12 2	2,5b
11,9	11 1 8 6 3 4 9 10 7 5 12 2	2,4b
11,10	11 1 8 7 3 4 9 10 6 5 12 2	2,3b
11,11	11 1 9 3 6 8 5 7 10 4 12 2	2,2b
11,12	11 1 9 3 7 5 8 6 10 4 12 2	2,1b